# BSc Analízis I. előadásjegyzet
# 2009/2010. őszi félév

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2010. április 30.

# Tartalomjegyzék

# Előszó

Ez a jegyzet a 2009/2010-es tanév őszi félévében tartott Analízis I. kurzus anyagához készül. A jegyzet a félév során folyamatosan bővül, az utolsó változtatás dátuma a címlapon látható. A jegyzetben bizonyára előfordulhatnak hibák – ezek jelzését örömmel veszem a `seszter@cs.elte.hu` e-mail-címen!

A jegyzet során az alább jelöléseket használom:

$\mathbb{N}$ természetes számok, a 0-t is beleértve;

$\mathbb{Z}$ egész számok;

$\mathbb{Q}$ racionális számok;

$\mathbb{R}$ valós számok;

$\mathbb{R}^+$ pozitív valós számok;

$\mathbb{R}^-$ negatív valós számok (és hasonlóan: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}^+$, stb.)

# Első fejezet

# Bevezetés

## 1.1. Logikai állítások, műveletek, tagadás

A következőkben néhány alapvető logikai fogalmat tárgyalunk.

**1.1. Definíció.** *Állítás*nak nevezünk egy olyan kijelentést, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
Pl.: Ez az alma piros. A tábla zöld.

**1.2. Definíció.** *Logikai műveletek:* Állításokból gyártanak új állításokat. Legyen $A$ és $B$ egy-egy állítás.

(a) *és*, jele: $\wedge$

$A \wedge B$ pontosan akkor igaz, ha $A$ és $B$ is igaz.

(b) *vagy*, jele: $\vee$ (fontos! megengedő vagy)

$A \vee B$ pontosan akkor hamis, ha $A$ és $B$ is hamis.

(c) *nem*, jele: $\neg$

$\neg A$ pontosan akkor igaz, ha $A$ hamis (és fordítva).

(d) *következtetés (implikáció)*, jele: $\Rightarrow$

$A \Rightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $\neg A$ vagy $B$ igaz.

(e) *ekivivalencia*, jele: $\Leftrightarrow$

$A \Leftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is igaz.

**1.3. Definíció.** *Nyitott mondat:* olyan állítás, mely változót tartalmaz. Igazságértéke a változó értékétől függ.
Pl.: Az $n$ szám négyzetszám. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ha $A(x)$ nyitott mondat ($x$ a változó), akkor ebből új állításokat nyerhetünk a $\exists$ (létezik) és $\forall$ (minden) ún. *kvantorok* segítségével:

$$(\forall x)A(x),$$
$$(\exists x)A(x).$$

Például: $(\forall x)\ x^2 - 3x + 2 \geq 0$.
A fenti állítások *tagadása*:

$$\neg((\forall x)A(x)) = (\exists x)\neg A(x),$$

$$\neg((\exists x)A(x)) = (\forall x)\neg A(x).$$

A példában szereplő állítás tagadása: $(\exists x)\ x^2 - 3x + 2 < 0$.

## 1.2. Bizonyítási módszerek

### Indirekt bizonyítás

Ennek a bizonyítási módszernek a menete, hogy feltesszük a bizonyítandó állítás ellenkezőjét, és ebből ellentmondásra jutunk.

Példa:

**1.4. Állítás.** *$\sqrt{2}$ irracionális.*

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $p$, $q$ pozitív egész számok, $q \neq 0$, továbbá $p$ és $q$ legnagyobb közös osztója 1, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ amiből } 2q^2 = p^2.$$

Ebből látszik, hogy $p^2$, így $p$ is páros szám kell legyen, vagyis $p = 2r$, ahol $r$ egész. Így

$$2q^2 = 4r^2, \text{ vagyis } q^2 = 2r^2,$$

tehát $q$ is páros. Ez ellentmond annak, hogy $p$ és $q$ legnagyobb közös osztója 1, tehát a kiinduló feltevés hamis, így $\sqrt{2}$ irracionális. □

### Teljes indukció

Teljes indukcióval olyan állításokat bizonyítunk, melyek *minden* $n$ (vagy *minden elég nagy* $n$) természetes számra vonatkoznak . A teljes indukció menete a következő.

1. Belátjuk az állítást $n = 0$-ra (vagy arra a legkisebb $n$-re, amiről az állítás szól).

2. Belátjuk a következőt: *ha* az állítás *valamelyik* $n$ természetes számra igaz, *akkor* igaz $n+1$-re is.

A természetes számok tulajdonságaiból következik, hogy a fenti két lépés bizonyításával az állítást *minden* természetes számra beláttuk. Ugyanis, az 1. lépés alapján az állítás igaz $n = 0$-ra. A 2. lépésből tudjuk, hogy *ekkor* az állítás igaz $n = 0 + 1 = 1$-re is. Ismét alkalmazva a 2. lépést, tudjuk, hogy az állítás igaz $n = 1 + 1 = 2$-re. És így tovább – „végtelen sok lépés után” kapjuk, hogy az állítás *minden* $n$ természetes számra teljesül.
A 2. lépésben szereplő feltevést szokás *indukciós feltételnek* is nevezni.
Példa:

**1.5. Állítás.** *Minden $n \geq 1$ természetes számra*

$$2^n > n.$$

*Bizonyítás.* Végrehajtjuk a teljes indukció lépéseit.

1. $n = 1$ esetén az egyenlőtlenség $2^1 > 1$ alakú, és mivel $2^1 = 2$, ezért $2 > 1$ teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy az állítás *valamelyik* $n$ természetes számra igaz, vagyis *erre* az $n$-re $2^n > n$. Lássuk be, hogy ekkor $n+1$-re is igaz! A belátandó állítás tehát:

$$2^{n+1} > n+1.$$

Mivel $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, és a feltevés szerint $2^n > n$, ezért

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n.$$

Másrészt bármilyen $n \geq 1$ egészre $2 \cdot n \geq n+1$, tehát

$$2^{n+1} > n+1,$$

és ezt kellett belátnunk.

□

1.6. *Megjegyzés.* A fenti állítás $n = 0$-ra is teljesül (hiszen $2^0 = 1 > 0$), de az indukciós lépés csak $n \geq 1$ esetén működik.

Fontos látnunk, hogy az indukció 2. lépésében *nem* azt tesszük fel, hogy az állítás *bármely* $n$-re igaz – hiszen akkor magának az állításnak az igaz-voltát tételeznénk fel, amit pedig bizonyítani akarunk. *Csak* annyit teszünk fel, hogy az állítás *egy* (*valamelyik*) $n$ természetes számra igaz. Ilyen $n$ létezik, hiszen az 1. lépésben éppen ezt láttuk be.

## 1.3. Fontos egyenlőségek, egyenlőtlenségek

**1.7. Tétel** (Bernoulli-egyenlőtlenség)**.** *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $a \geq -1$, $a \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

*Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $n = 1$ *vagy* $a = 0$.

*Bizonyítás.* A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 1$ esetén a belátandó állítás

$$1 + a \geq 1 + a,$$

ami tetszőleges $a$-ra igaz.

2. Tegyük fel most, hogy az állítás *valamelyik* $n \in \mathbb{Z}^+$-ra igaz! Lássuk be, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n+1$-re is teljesül, vagyis

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Ebből, kihasználva, hogy $1 + a \geq 0$ (mivel $a \geq -1$) kapjuk, hogy

$$(1+a) \cdot (1+a)^n \geq (1+a) \cdot (1 + n \cdot a) = 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2. \tag{1.1}$$

Tudjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} = (1+a) \cdot (1+a)^n, \tag{1.2}$$

Összevetve (1.1)-et és (1.2)-t kapjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a, \tag{1.3}$$

amit látni akartunk.

Hátravan még az egyenlőség teljesülésének esete. Világos, hogy $n = 1$ ill. $a = 0$ esetén egyenlőség teljesül. Ha azt tesszük fel, hogy egyenlőség van, akkor ezt $n$ helyett $n+1$-re felírva, (1.3) alapján

$$(1+a)^{n+1} = 1 + (n+1)\cdot a + n\cdot a^2 = 1 + (n+1)\cdot a$$

kell igaz legyen, amiből $n \cdot a^2 = 0$. Ezért vagy $n = 0$, és akkor $n+1 = 1$, vagy $a = 0$. □

**1.8. Tétel** (Binomiális tétel)**.** *Tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n, \tag{1.4}$$

*másképp írva:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

*Itt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},\ 1 \le k \le n, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

*Bizonyítás.* A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 0$ esetén az egyenlőség
$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}b^0,$$
ami $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy az (1.4) egyenlőség *valamelyik* $n$-re teljesül! Belátjuk, hogy $n+1$-re is igaz. Mivel $(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n$, ezért az indukciós feltevés szerint
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot\left(\binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n\right)\\ &= \binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^nb + \binom{n}{n}a^{n+1} +\\ &+ \binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb\\ &= \binom{n}{0}b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^2b^{n-1} + \cdots\\ &+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]a^nb + \binom{n}{n}a^{n+1}.\end{aligned}$$
Felhasználva, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ esetén
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$
továbbá
$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0},\ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$
kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}&(a+b)^{n+1} =\\ &\binom{n+1}{0}b^{n+1} + \binom{n+1}{1}ab^n + \binom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n}a^nb + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1},\end{aligned}$$
ami épp a bizonyítandó állítás $n+1$-re.

$\square$

**1.9. Tétel** (Számtani-mértani-harmonikus közép közti egyenlőtlenség).
*Legyenek* $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ *tetszőleges számok* ($n \geq 1$). *Ekkor*

$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \textit{(számtani közép)},$$

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \qquad \textit{(mértani/geometriai közép)},$$

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \textit{(harmonikus közép)}$$

*jelöléssel*

$$H_n \leq G_n \leq A_n. \tag{1.5}$$

*Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

*Bizonyítás.* A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$ esetben triviális. Tegyük fel most, hogy valamely $n$-re és tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ számokra

$$A_n \geq G_n.$$

Legyenek adva $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} > 0$ számok, és tegyük fel, hogy úgy vannak sorba rendezve, hogy $a_{n+1}$ az (egyik) legnagyobb közülük (világos, hogy az állítás nem függ a számok sorrendjétől). Be kell látnunk, hogy $A_{n+1} \geq G_{n+1}$, vagyis mindkét oldalt $n+1$. hatványra emelve

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \tag{1.6}$$

ami a belátandó állítással ekvivalens. Az alábbi átalakítást végezzük:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1) \cdot A_n + a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Mivel $a_{n+1}$ az (egyik) legnagyobb szám, ezért könnyen látható, hogy $a_{n+1} - A_n \geq 0$. Így a kapott kifejezést a Binomiális tétel szerint kifejtve az (1.4) összegben minden tag pozitív. Ezért a hatvány értékét csökkentjük, ha az (1.4) összegnek csak az utolsó két tagját hagyjuk meg, vagyis

$$\begin{aligned}\left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \binom{n+1}{n} A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1} + \binom{n+1}{n+1} A_n^{n+1} \\ &= (n+1) \cdot A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1} + A_n^{n+1} \\ &= A_n^n \cdot (a_{n+1} - A_n) + A_n^{n+1} = A_n^n \cdot a_{n+1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$A_n^n \cdot a_{n+1} \geq G_n^n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

tehát (1.7) és (1.8) alapján

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó (1.6) egyenlőtlenség.
A mértani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség könnyen adódik az előbb bizonyított mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből. Alkalmazzuk ez utóbbit az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számok reciprokaira, ebből

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n},$$

ami épp a bizonyítandó állítás.
Ha $a_1 = \cdots = a_n$, akkor az (1.5) egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek. Belátjuk, hogy

$$G_n = A_n \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n,$$

a harmonikus közép esete hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel indirekt, hogy $A_n = G_n$, de például $a_1 \neq a_2$. Cseréljük ki $a_1$-t és $a_2$-t is $\frac{a_1+a_2}{2}$-re, az $a_3, \ldots, a_n$ számokat hagyjuk változatlanul! Ekkor könnyen látható, hogy az

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$$

számok számtani közepének értéke változatlanul $A_n$. Másrészt

$$a_1 \cdot a_2 < \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \Longleftrightarrow 0 < (a_1 - a_2)^2$$

teljesül, mivel $a_1 \neq a_2$. Így

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} = A_n = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$ számok mértani közepe nagyobb, mint a számtani közepe – ami ellentmondás. □

A fenti egyenlőtlenség-láncolathoz kapcsolható még egy: a négyzetes középről szóló. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok ($n \geq 1$) *négyzetes közepe:*

$$Q_n := \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

**1.10. Tétel.** *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számok ($n \geq 1$) közepei között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy a fentiek alapján elég az utolsó egyenlőtlenséget bizonyítani. Teljes indukcióval járunk el.
1. Az állítás $n = 1$-re triviálisan teljesül. Lássuk be $n = 2$-re, hogy $A_2 \leq Q_2$, mert erre a bizonyítás során később szükségünk lesz! Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}{4} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_1 - a_2)^2,\end{aligned}$$

ami teljesül.

2. Tegyük fel, hogy valamely $n$-re és tetszőleges $a_1, \dots, a_n$ számokra igaz, hogy $A_n \le Q_n$. Legyenek adva $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ valósak. Be kell lássuk, hogy a belőlük képezett számtani közép kisebb vagy egyenlő, mint a négyzetes közép – vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}. \tag{1.9}$$

Átalakítva a bal oldalt, az alábbit kapjuk:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2 A_n^2 + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}. \tag{1.10}$$

Kihasználva az indukciós feltételt, vagyis hogy $A_n^2 \le Q_n^2$, kapjuk:

$$\frac{n^2 A_n^2 + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \le \frac{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}. \tag{1.11}$$

A jobb oldalon a számlálóban a 2. tag

$$2nA_n \cdot a_{n+1} = 2 \cdot (a_1 + \cdots + a_n) \cdot a_{n+1} = 2 \cdot (a_1 \cdot a_{n+1} + \cdots + a_n \cdot a_{n+1})$$

alakú. Alkalmazzuk minden tagra az $n = 2$-re már belátott $G_2(\le A_2) \le Q_2$ egyenlőtlenséget! Ebből

$$a_j \cdot a_{n+1} \le \frac{a_j^2 + a_{n+1}^2}{2}, \ j = 1, \dots, n.$$

Így tovább alakítva (1.11) jobb oldalát:

$$\begin{aligned}
& \frac{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + 2 \cdot (a_1 \cdot a_{n+1} + \cdots + a_n \cdot a_{n+1}) + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \\
\le \quad & \frac{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1^2 + \cdots + a_n^2) + n \cdot a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \\
= \quad & \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Egybevetve (1.10)-et, (1.11)-et és (1.12)-t kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. □

## 1.4. Halmazok

Egy **halmaz**t akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat”, a „szép lány”, az „elég nagy szám” vagy a „kicsi pozitív szám” nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezekről nem kérdezzük vagy hogy benne vannak-e valamilyen halmazban vagy hogy alkotnak-e halmazt.)
Legyen $A$ halmaz, $x$ egy jól definiált dolog. Ha $x$ hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelölje. Ha $x$ nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.
A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például

$$A := \{a, b, c, d\}.$$

Ilyenkor minden elemet csak egyszer sorolunk fel. Más módon egy értelmes tulajdonsággal adhatjuk meg a halmazt, például

$$B := \{x \ : \ x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}.$$

A $B$ halmaz megadásánál használni fogjuk az alábbi (kevésbé precíz) felírást is:

$$B := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}.$$

**1.11. Definíció.** Legyen $A$ és $B$ halmaz. Azt mondjuk, hogy $A$ *része* vagy *részhalmaza* a $B$ halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.

**1.12. Definíció.** Legyen $A$ és $B$ halmaz. Az $A$ halmaz *egyenlő* a $B$ halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.

Fontos, hogy az analízisben a fenti $\subset$ halmazok közötti ún. reláció jelenthet egyenlőséget is. Könnyen meggondolható az alábbi

**1.13. Állítás.** *Legyen $A$ és $B$ halmaz. $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.*

A következőkben definiálunk néhány műveletet, melyekkel halmazokból újabb halmazokhoz juthatunk.

**1.14. Definíció.** Legyen $A$ és $B$ halmaz.
Az $A$ és $B$ *egyesítése (uniója)* az a halmaz, amelyre

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

Az $A$ és $B$ *metszete (közös része)* az a halmaz, amelyre

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Az $A$ és $B$ *különbsége* az a halmaz, amelyre

$$A \setminus B := \{x \ : \ x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen $x$ dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Azt a halmazt, amelynek bármely jól definiálható dolog sem eleme, **üres halmaz**nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.
Legyen $H$ halmaz és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az $A$ halmaz ($H$-ra vonatkozó) *komplementerén* az $A^c := H \setminus A$ halmazt értjük (a komplementerhalmaz jelölésére sosem fogjuk az $\bar{A}$-t használni, mert ez a későbbiekben mást fog jelenteni!). Itt fontos szerepe van a $H$ ún. alaphalmaznak is. Legyen például $A := [0{,}1]$ zárt intervallum. Ha $H = \mathbb{R}$, akkor $A^c = H \setminus A = (-\infty{,}0) \cup (1, +\infty)$ nyílt intervallumok uniója. Ha azonban $H = [0{,}2]$, akkor $A^c = H \setminus A = (1{,}2]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum.
*De Morgan-azonosságok*nak nevezik a következő tételt.

**1.15. Tétel.** *Legyen $H$ halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \textit{és} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

*Bizonyítás.* Házi feladat. $\square$

Tekintsük alapfogalomnak az $(a, b)$ **rendezett pár**t, amelynek lényeges tulajdonsága, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

A rendezett pár segítségével értelmezzük a halmazok szorzatát.

**1.16. Definíció.** Legyen $A, B$ halmaz. Az $A$ és $B$ *Descartes-szorzata*

$$A \times B := \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$$

rendezett párokból álló halmaz.

Például $A := \{2{,}3{,}5\}, B := \{1{,}3\}$ esetén

$$A \times B = \{(2{,}1), (2{,}3), (3{,}1), (3{,}3), (5{,}1), (5{,}3)\}.$$

## 1.5. Függvények

A **függvény** fogalmát alapfogalomnak tekintjük – halmazok közötti egyértelmű hozzárendelést értünk alatta. Az $x$-hez hozzárendelt elemet $f(x)$-szel jelöljük. Ha $X$ és $Y$ tetszőleges halmazok, akkor

$$f : X \to Y$$

egy olyan függvény, melyre

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f) \subset X \text{ esetén } f(x) \in Y.$$

$\mathcal{D}(f)$ jelöli az $f$ függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X : x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az $X$ egy részhalmaza. Az $f$ függvény $\mathcal{R}(f)$-el jelölt *értékkészlete* $Y$-nak részhalmaza és

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ valamely } x \in \mathcal{D}(f)\text{-re}\}.$$

Fontos fogalom a függvény grafikonja.

**1.17. Definíció.** Egy $f : X \to Y$ függvény *grafikonja* a $\mathcal{D}(f) \times \mathcal{R}(f)$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol $x$ az $f$ értelmezési tartományából való.

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza.
Egy függvény inverze csak speciális, ún. kölcsönösen egyértelmű függvények esetén értelmezhető.

**1.18. Definíció.** Legyen $f : X \to Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $f$ *kölcsönösen egyértelmű* vagy *injektív*, ha különböző $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ elemeknek különböző $Y$-beli elemeket feleltet meg, azaz

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 \neq x_2 \text{ esetén } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Másképp:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Az $f : X \to Y$ *bijektív függvény* vagy *bijekció*, ha $f$ injektív, $\mathcal{D}(f) = X$ és $\mathcal{R}(f) = Y$.

**1.19. Definíció.** Legyen $f : X \to Y$ injektív függvény. Ekkor az $f$ *inverze* vagy *inverzfüggvénye* az az

$$f^{-1} : Y \to X, \ \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$$

függvény, mely egy $y \in \mathcal{R}(f)$ ponthoz azt az egyértelműen létező $x \in \mathcal{D}(f)$ pontot rendeli, amelyre $f(x) = y$, vagyis

$$\text{bármely } f(x) = y \in \mathcal{R}(f) \text{ esetén } f^{-1}(y) = x.$$

1.20. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha $f : X \to Y$ injektív, akkor az $f^{-1} : Y \to X$ függvényre $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$, továbbá $f^{-1}$ is injektív. Ha $f$ bijektív, akkor $f^{-1}$ is bijektív.

Könnyen meggondolható, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $\operatorname{graph}(f^{-1}) \subset \mathbb{R}^2$ úgy nyerhető, hogy $\operatorname{graph}(f)$-et tükrözzük a $45°$-os $(y = x)$ egyenesre.

**1.21. Definíció.** Legyen $g : X \to Y, f : Y \to Z$. Ekkor az $f$ és $g$ függvények *kompozíciója* az az $f \circ g : X \to Z$ függvény, melyre

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\},$$

és

$$\text{bármely } x \in \mathcal{D}(f \circ g) \text{ esetén } (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

**1.22. Példa.** A $g$ függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, g(x) := 2x + 1;$$

az $f$ függvény pedig minden számot emeljen négyzetre

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, f(x) := x^2,$$

akkor

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$$

lesz az $f$ és $g$ kompozíciója.

**1.23. Definíció.** Legyen $f : X \to Y$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Az $f$ függvény $H$-ra való *leszűkítése* az az $f_{|_H} : H \to Y$ függvény, amelyre bármely $x \in H$ esetén $f_{|_H}(x) := f(x)$.

A továbbiakban a véges, megszámlálható és a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmát definiáljuk.

**1.24. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *véges*, ha létezik $n \in \mathbb{Z}^+$ és $\phi : A \to \{1,2,\ldots,n\}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *megszámlálható*, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\phi) = A$ injektív függvény.

A definíciókból következik, hogy egy megszámlálható halmaz vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
Példák megszámlálhatóan végtelen halmazokra:

1. Legyen $A$ a páros természetes számok halmaza, vagyis

   $$A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   Könnyen(!) látható, hogy a

   $$\phi(n) := 2n,\ n \in \mathbb{N}$$

   függvény bijekciót létesít $\mathbb{N}$ és $A$ között.

2. Meglepő, de a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.
   Írjuk fel az $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ nevezőjű törteket soronként.

   $$\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

   A $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

   $$\phi(1) := \frac{0}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{1}, \quad \phi(3) := \frac{1}{2}, \quad \phi(4) := -\frac{1}{2}, \ldots$$

   A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, ügyelve arra, hogy olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így $\phi$ bijekció lesz $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ között, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálható.

## 1.6. Valós számok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket ,,rendezünk". Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők.

### 1.6.1. Műveletek és rendezés

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy van még egy összeadásnak nevezett $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)
a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadás egységeleme)
a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a + (-a) = 0$.

m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)
m2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociativitás)
m3. van olyan $1 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzás egységeleme)
m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) ún. rendezési reláció, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
r1. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$ (reflexív),
r2. ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetrikus),
r3. ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitív),
r4. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$ (teljes),
r5. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a + c \leq b + c$.
r6. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $0 \leq c$, akkor $a \cdot c \leq b \cdot c$.
Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b,\ a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk.
Az a1.–a4., m1.–m4., d., r1.–r6. alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos ,,szabály". Kiegészítésül három fogalmat külön is megemlítünk.

**1.25. Definíció.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

Az osztás tehát elvégezhető a valós számokkal.

**1.26. Definíció.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x$ *abszolút értéke*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.

2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 \leq \varepsilon$. Ekkor $(x \leq \varepsilon \text{ és } -x \leq \varepsilon) \Longleftrightarrow |x| \leq \varepsilon$.

3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a + b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ezek az állítások könnyen igazolhatóak. A 4. bizonyítását megmutatjuk.
Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőtlenséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1.13}$$

Hasonló meggondolással

$$b = b - a + a$$

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad / - |a|$$

$$|b| - |a| \leq |b - a|$$

$$-(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b|. \tag{1.14}$$

Az (1.13) és az (1.14) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

### 1.6.2. Intervallumok és környezetek

**1.27. Definíció.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $I$ *intervallum*, ha bármely $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén ha $x_1 < x < x_2$, akkor $x \in I$.

**1.28. Tétel.** *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.*

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ *;* $(0, +\infty) =: \mathbb{R}^+$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ *;* $(-\infty, 0) =: \mathbb{R}^-$

$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Megemlítjük, hogy az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ ún. *elfajuló* intervallumok.

**1.29. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$. Az *$a$ pont $r$ sugarú környezetén* a

$$K_r(a) := (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy $K(a)$ az *$a$ pont egy környezete*, ha van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $K(a) = K_r(a)$.

### 1.6.3. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az $\mathbb{R}$ egy nevezetes részhalmazát.
Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre
$1^o$ $0 \in \mathbb{N}$
$2^o$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \in \mathbb{N}$
$3^o$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \neq 0$ (a 0 az „első" elem)
$4^o$ abból, hogy a) $S \subset \mathbb{N}$
b) $0 \in S$
c) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \in S$
következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)
Az $\mathbb{R}$-nek az ilyen $\mathbb{N}$ részhalmazát a **természetes számok halmazá**nak nevezzük.
Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}$ az **egész számok halmaza**

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} :$ van olyan $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0,$ hogy $x = \frac{p}{q}\}$ a **racionális számok halmaza**

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az **irracionális számok halmaza**.

Az $\mathbb{N}$ segítségével a műveleti és rendezési szabályrendszer mellé a harmadik követelményt illesztjük az $\mathbb{R}$-hez.

**Archimedeszi axióma:** Bármely $x \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$.

Könnyen látható, hogy ezen axiómával ekvivalens az alábbi:

**Archimedeszi axióma - változat:** Bármely $y > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < y$.

Az Archimedeszi axióma egy fontos következménye, hogy minden (nyílt) intervallumban van racionális szám. Ez valami olyasmit jelent, hogy a racionális számok *„sűrűn"* helyezkednek el a számegyenesen.

**1.30. Következmény.** *Legyenek $a < b$ tetszőleges valós számok. Ekkor az $(a, b)$ nyílt intervallumban van racionális szám, vagyis*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

*Bizonyítás.* Az egyszerűség kedvéért legyen $0 < a < b$, a többi eset hasonlóan meggondolható. A bizonyítás alapgondolata, hogy az Archimedeszi axióma biztosítja, hogy az $a$ és $b$ számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, mellyel mindkettőt megszorozva a különbségük nagyobb, mint 1, vagyis

$$1 < qb - qa.$$

Ekkor a $(qa, qb)$ nyílt intervallumban van $p \in \mathbb{N}$ természetes szám, így $a < \frac{p}{q} < b$ teljesül. Nézzük részletesen!

Az Archimedeszi axióma szerint az

$$\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$$

számhoz található olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{1}{b-a} < q. \tag{1.15}$$

Másrészt, szintén az Archimedeszi axióma miatt választhatunk olyan $p \in \mathbb{N}$ *legkisebb* számot, melyre $qa < p$, vagyis melyre

$$qa < p \leq qa + 1 \tag{1.16}$$

teljesül. Mivel (1.15) miatt

$$qa + 1 < qb,$$

ezért az (1.16)-ból kapjuk:

$$qa < p < qb \;\Leftrightarrow\; a < \frac{p}{q} < b,$$

vagyis

$$\frac{p}{q} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

□

Az Archimedeszi axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az $\mathbb{R}$. Ugyanis belátható, hogy $\mathbb{Q}$, a racionális számok halmaza kielégíti az összes fenti axiómát – tehát ezek az axiómák nem biztosítják az irracionális számok létezését (a számegyenesen maradtak „lyukak”). Szükségünk lesz még egy utolsó axiómára, amelyet néhány fogalommal készítünk elő.

### 1.6.4. Felső és alsó határ

**1.31. Definíció.** Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy $A$ *felülről korlátos* számhalmaz, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq K$. Az ilyen $K$ az $A$ halmaz egyik *felső korlátja.*

Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{K \in \mathbb{R} : K \text{ felső korlátja az A halmaznak}\}$$

halmazt. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ a $B$ halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

$1^o$ $\alpha \in B$ ($\alpha$ is felső korlátja az $A$ halmaznak)

$2^o$ bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \leq K$.

A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Felső határ axiómája:** Minden felülről korlátos $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ halmaznak **van** legkisebb felső korlátja.

Az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az $A$ halmaznak) a halmaz *felső határá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \quad \text{(„az } A \text{ halmaz szuprémuma”)}$$

Nyilván igaz a $\sup A$ két tulajdonsága:

$1^o$ bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$

$2^o$ bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

Ha $\sup A \in A$, akkor $\sup A$ az $A$ halmaz *maximuma.*

1.32. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ felülről *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\sup A := +\infty.$$

Nézzük meg most egy példán, hogyan biztosítja a felső határ axiómája az irracionális számok létezését!

**1.33. Példa.** Tekintsük az alábbi halmazt!

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

Világos, hogy $A$ nem üres, hiszen például $0 \in A$. Másrészt $A$ felülről korlátos, mivel 2 nyilván egy felső korlátja. A Felső határ axiómája szerint létezik $A$-nak legkisebb felső korlátja, $\sup A \in \mathbb{R}$, amiről belátható, hogy nem lehet racionális. Ezt a $\sup A$ számot nevezzük $\sqrt{2}$-nek.

A műveleti, rendezési szabályrendszerrel, az Archimedeszi axiómával és a Felső határ axiómájával teljessé tettük az $\mathbb{R}$ valós számok halmazát. Ezzel biztos alapot teremtettünk a jövőbeni számolásokhoz is.

Néhány további megállapodás.

**1.34. Definíció.** Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy $A$ *alulról korlátos*, ha van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$ esetén $L \leq a$. Az $L$ az $A$ halmaz egyik *alsó korlátja.*

Legyen $A \neq \emptyset$ alulról korlátos számhalmaz. Az $A$ alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz *alsó határa.* (Ennek létezéséhez már nem kell újabb axióma, visszavezethető a felső határ létezésére.) Az $A$ halmaz alsó határát

$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$

jelölje. Nyilván igaz, hogy

$1^o$ bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$

$2^o$ bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

Ha $\inf A \in A$, akkor $\inf A$ az $A$ halmaz *minimuma.*

1.35. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ alulról *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\inf A := -\infty.$$

1.36. *Megjegyzés.* A fentiekben nem volt szándékunk a valós számok precíz axiomatikus felépítése. Megjegyezzük, hogy az Archimedeszi axióma mellé elég lett volna az alábbi axiómát feltenni, hogy biztosítsuk az irracionális számok létezését.

**Cantor-axióma:** Legyenek $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ún. egymásba skatulyázott zárt intervallumok, vagyis

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor ezen intervallumoknak van közös pontja, vagyis

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

**1.37. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az Archimedeszi és Cantor-axiómák együtt ekvivalensek a Felső határ axiómájával, vagyis

$$(\text{Archimedeszi axióma} + \text{Cantor-axióma}) \iff \text{Felső határ axiómája}.$$

### 1.6.5. Valós számok hatványai

**1.38. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $a^1 := a, a^2 := a \cdot a, a^3 := a^2 \cdot a, \ldots, a^n := a^{n-1} \cdot a, \ldots$

**1.39. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a$. A $\sqrt{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete $a$, azaz $0 \leq \sqrt{a}, (\sqrt{a})^2 = a$.

Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

**1.40. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa $a$.

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

**1.41. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa $a$.

A gyökök létezése a Felső határ axiómájából következik hasonlóan, mint az 1.33. Példában, de itt nem részletezzük.

Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az $n$ paritásának megfelelő, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

**1.42. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

**1.43. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

**1.44. Definíció.** Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.

Látható, hogy ezzel a definícióláncolattal egy $a \in \mathbb{R}^+$ bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ,
2. $a, b \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,
3. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

A későbbiekben definiálni fogjuk egy szám irracionális kitevős hatványát is.

# Második fejezet

# Elemi függvények

Ismertetjük a valós számok halmazán értelmezett, valós szám értékű függvények legfontosabb tulajdonságait. Definiáljuk a gyakran használt valós függvényeket, melyeket elemi függvényeknek neveznek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

– Műveletek; korlátos, monoton, periodikus, páros, páratlan függvény fogalma

– Hatványfüggvények

– Exponenciális és logaritmus függvények

– Trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik

## 2.1. Valós függvények alaptulajdonságai

**2.1. Definíció.** Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *valós függvény*nek nevezünk.

**2.2. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \mathcal{D}(\lambda f) = \mathcal{D}(f).$$

**2.3. Definíció.** Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Ekkor $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \qquad & \mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \qquad & \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g). \end{aligned}$$

**2.4. Definíció.** Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H := \mathcal{D}(g) \setminus \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor $1/g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(1/g)(x) := \frac{1}{g(x)},\ \mathcal{D}(1/g) = H.$$

**2.5. Definíció.** Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot 1/g$$

**2.6. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f$ *felülről korlátos* függvény, ha az $\mathcal{R}(f) \subset \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy $f$ *alulról korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy $f$ *korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról is és felülről is korlátos halmaz.

**2.7. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f$ *monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az $f$ *szigorúan monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2).$$

Azt mondjuk, hogy $f$ *monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Az $f$ *szigorúan monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) > f(x_2).$$

**2.8. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f$ *páros* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = f(x)$.

**2.9. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f$ *páratlan* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

**2.10. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f$ *periodikus* függvény, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R},\ 0 < p$ szám, hogy

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $x + p,\ x - p \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

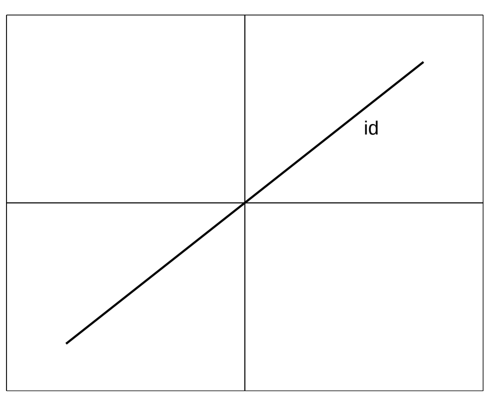
A $p$ szám a függvény egyik *periódus*a. (Vigyázat! Nem biztos, hogy van legkisebb periódus!)

## 2.2. Az elemi függvények

Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért a függvényeket mint $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ tüntetjük fel (tehát a nyíl előtt az értelmezési tartomány áll minden esetben).

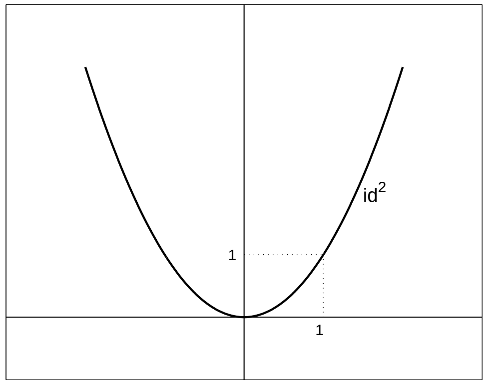
### 2.2.1. Hatványfüggvények

1. Legyen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}(x) := x$.




2.1. ábra.

Az id szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.1. ábra).

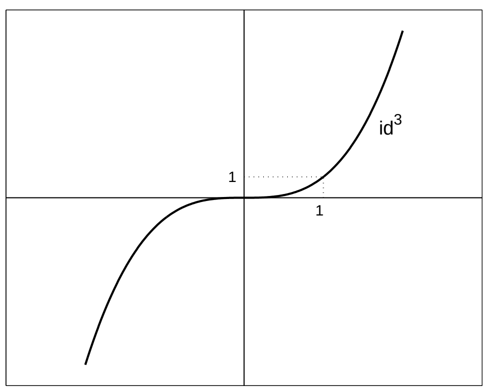



2.2. ábra.

2. Legyen $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^2(x) := x^2$.

   Az $\mathrm{id}^2{}_{|_{\mathbb{R}+}}$ szigorúan monoton növő, az $\mathrm{id}^2{}_{|_{\mathbb{R}-}}$ szigorúan monoton fogyó. Az $\mathrm{id}^2$ páros (2.2. ábra).

3. Legyen $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^3(x) := x^3$.




2.3. ábra.

   Az $\mathrm{id}^3$ szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.3. ábra).

4. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^n(x) := x^n$ függvény páros $n$ esetén az $\mathrm{id}^2$, páratlan $n$ esetén az $\mathrm{id}^3$ tulajdonságait örökli.

5. Legyen $\mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^{-1}(x) := 1/x$.

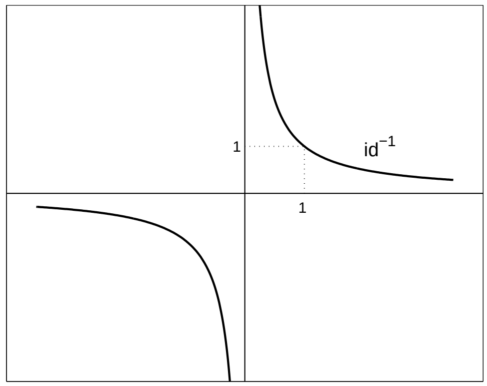
   Az $\mathrm{id}^{-1}{}_{|_{\mathbb{R}-}}$ és az $\mathrm{id}^{-1}{}_{|_{\mathbb{R}+}}$ szigorúan monoton fogyó (de $\mathrm{id}^{-1}$ nem monoton!). Az $\mathrm{id}^{-1}$ páratlan (2.4. ábra).

6. Legyen $\mathrm{id}^{-2} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^{-2}(x) := 1/x^2$.

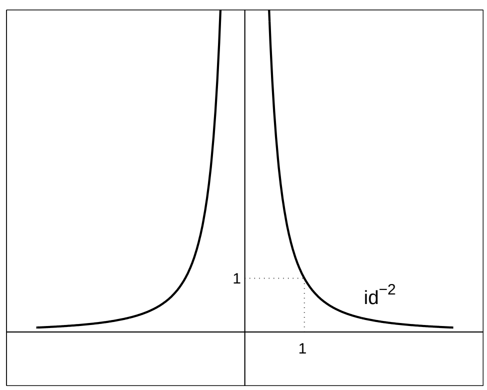
   Az $\mathrm{id}^{-2}{}_{|_{\mathbb{R}-}}$ szigorúan monoton nő, az $\mathrm{id}^{-2}{}_{|_{\mathbb{R}+}}$ szigorúan monoton fogy. Az $\mathrm{id}^{-2}$ páros (2.5. ábra).

7. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\mathrm{id}^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^{-n}(x) := 1/x^n$ függvény páros $n$ esetén az $\mathrm{id}^{-2}$, páratlan $n$ esetén az $\mathrm{id}^{-1}$ tulajdonságait örökli.

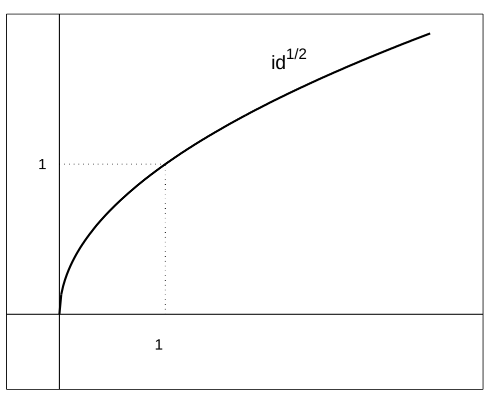
8. Legyen $\mathrm{id}^{1/2} : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ szigorúan monoton növő függvény (2.6. ábra).




2.4. ábra.



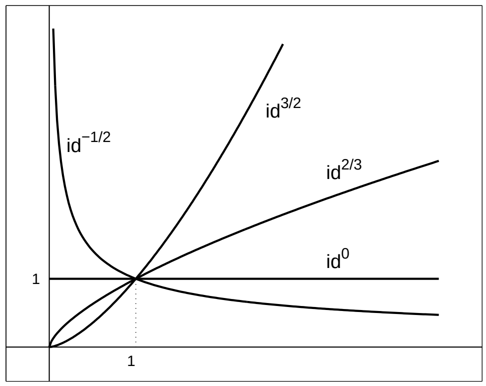

2.5. ábra.




2.6. ábra.

Megemlítjük, hogy az $\mathrm{id}^{1/2}$ az $\mathrm{id}^2|_{[0,\infty)}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető.

9. Legyen $r \in \mathbb{Q}$. Az $\mathrm{id}^r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^r(x) := x^r$. Néhány $r$ esetén szemléltetjük az $\mathrm{id}^r$ függvényeket (2.7. ábra).




2.7. ábra.

10. Végül legyen $\mathrm{id}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^0(x) := 1$. Az $\mathrm{id}^0$ monoton növő és monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (2.7. ábra).

### 2.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények

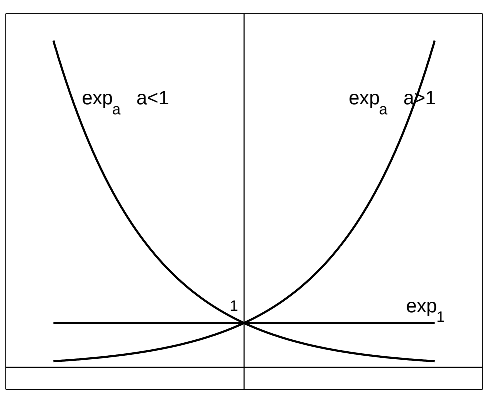
Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az $a$ alapú *exponenciális függvény*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x. \tag{2.1}$$

1. $\exp_a$ szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,
2. $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,
3. $\exp_a = \mathrm{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növő és monoton fogyó is) (2.8. ábra).

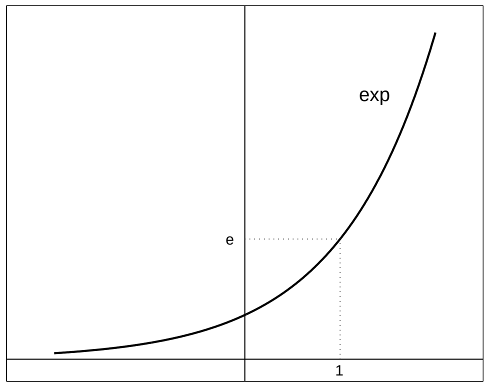
Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $\mathcal{R}(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, vagyis az $\exp_a$ csak pozitív értéket vesz fel (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$




2.8. ábra.

(Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_{\mathrm{e}} =: \exp$ függvénynek (2.9. ábra) (e az ún. Euler-féle szám).




2.9. ábra.

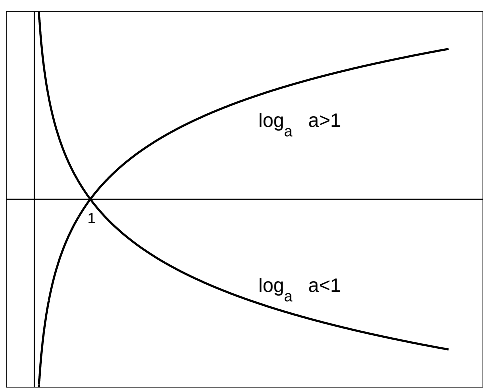
Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel $\exp_a$ szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye.

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

lesz az $a$ alapú *logaritmusfüggvény* (2.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ \ \log_a(x) = y, \ \text{amelyre} \ \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növekedő, ha $a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton




2.10. ábra.

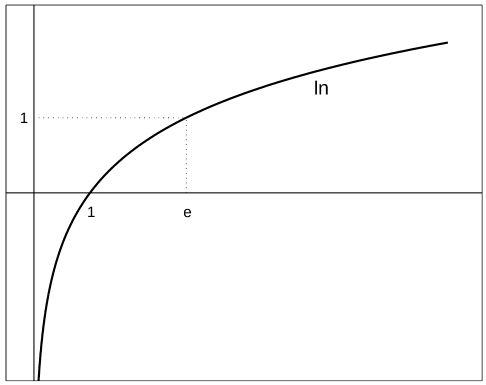
fogyó. A logaritmusfüggvények alapvető tulajdonságai a következők:

1. bármely $a > 0, \ a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén
$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$
2. bármely $a > 0, \ a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{R}$ esetén
$$\log_a x^k = k \log_a x,$$
3. bármely $a, b > 0, a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

A 3. tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmusfüggvény számszorosaként az összes logaritmusfüggvény előáll. Ezért is van kitüntetett szerepe az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_e$$

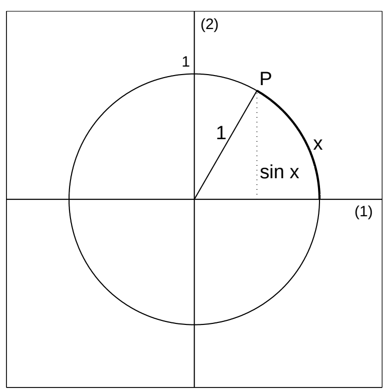
a „természetes alapú logaritmus” (2.11. ábra).




2.11. ábra.

### 2.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

A $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény precíz definíciója a későbbi félévek anyaga. Itt most a középiskolából ismert definíciót ismételjük át. Vegyünk fel a síkon egy origó középpontú, 1 sugarú kört! Ahol a vízszintes



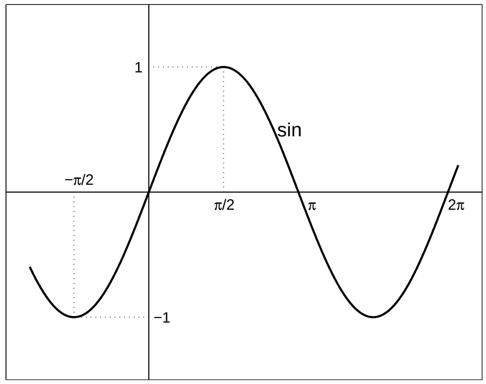

2.12. ábra.

tengely (pozitív fele) metszi a kört (vagyis az (1,0) pont), abból a pontból „mérjük fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő hosszúságú ívet a kör kerületére”, pozitív $x$ esetén pozitív, negatív $x$ esetén negatív irányítással. [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív $P$ végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (2.12. ábra). A sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.13. ábra). $\mathcal{R}(\sin) = [-1,1]$.
Legyen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Könnyen látható, hogy ez a fenti módon definiált $P$ pont 1. koordinátája lesz. A cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.14. ábra). $\mathcal{R}(\cos) = [-1,1]$.
Alapvető összefüggések:

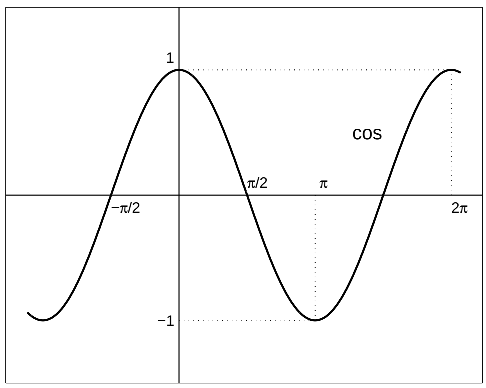
1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

2. Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2,$$




2.13. ábra.




2.14. ábra.

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2.$$

Legyen

$$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos} \quad \text{és} \quad \mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \; \mathcal{D}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

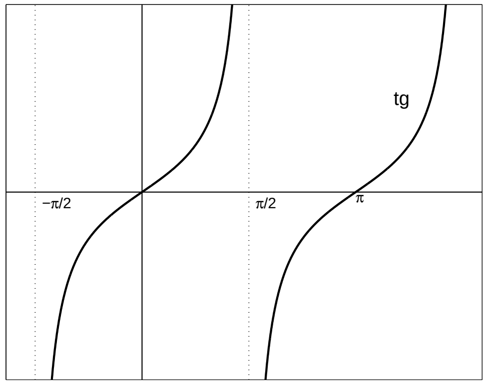
A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (2.15. és 2.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelműek.
Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ leszűkítést. Ez a függvény szigorúan monoton növő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverzfüggvénye:

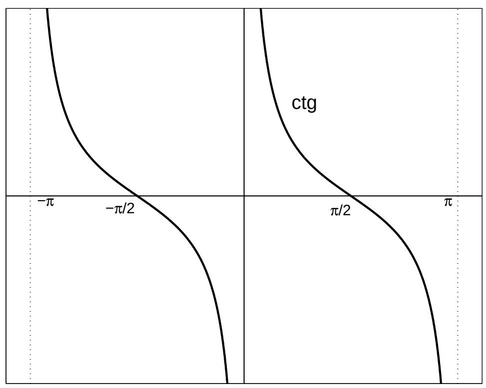
$$\arcsin := \left( \sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \right)^{-1}$$

Az értelmezésből $\arcsin : [-1{,}1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin \alpha = x$.
Az arcsin szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.17. ábra).
A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

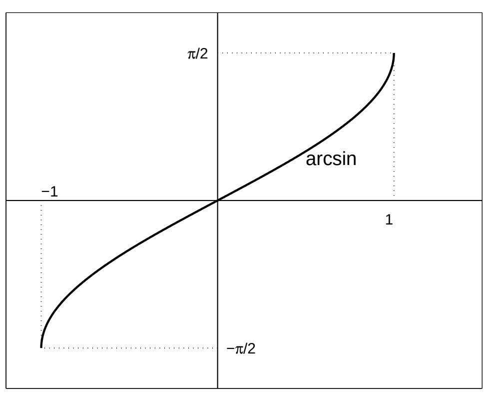
$$\arccos := \left( \cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1}$$




2.15. ábra.




2.16. ábra.



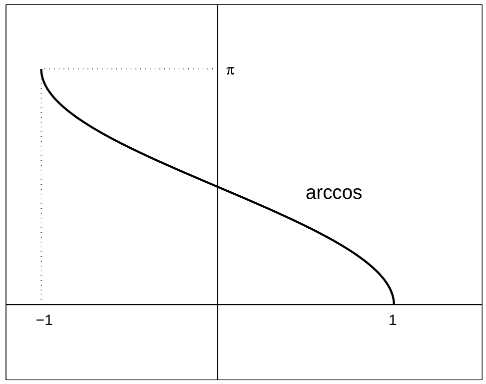

2.17. ábra.

Az értelmezésből következik, hogy $\arccos : [-1{,}1] \to [0, \pi],\ \arccos x = \alpha$, amelyre $\cos \alpha = x$.
Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (2.18. ábra).

A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye:

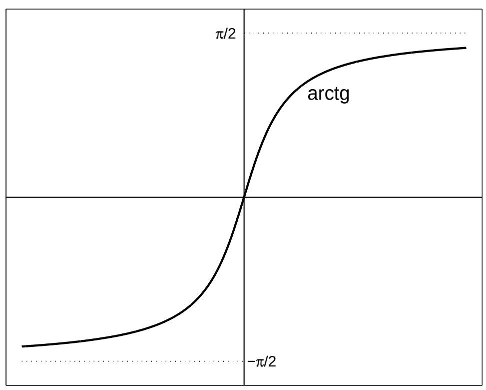
$$\mathrm{arctg} := (\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

Az értelmezésből következik, hogy $\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \mathrm{arctg}\ x = \alpha$, amelyre $\mathrm{tg}\ \alpha = x$.




2.18. ábra.

Az arctg szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.19. ábra).




2.19. ábra.

A ctg függvény $(0,\pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arcctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|_{(0,\pi)}}\right)^{-1}$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{ctg} \alpha = x$.
Az arcctg szigorúan monoton fogyó függvény (2.20. ábra).

### 2.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik

1. Legyen $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

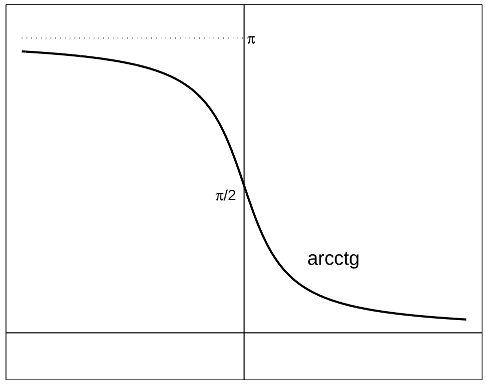
$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

   Az sh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.21. ábra).

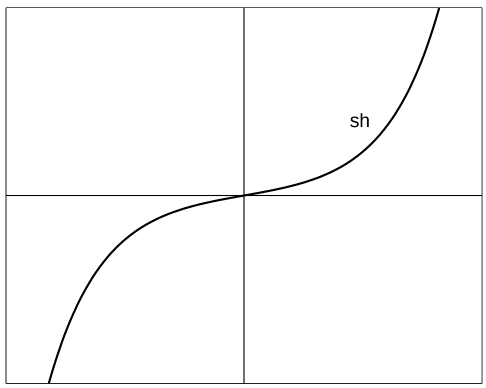
2. Legyen $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

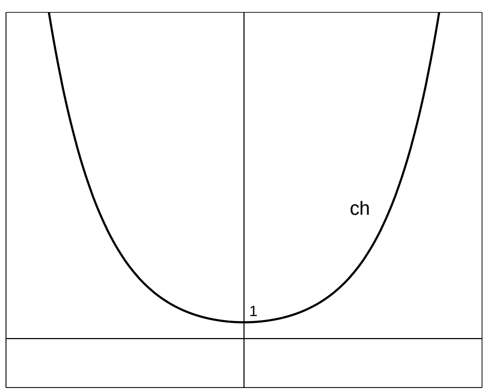
   A $\operatorname{ch}_{|_{\mathbb{R}^-}}$ szigorúan monoton fogyó, a $\operatorname{ch}_{|_{\mathbb{R}^+}}$ szigorúan monoton növő. A ch páros függvény. $\mathcal{R}(\operatorname{ch}) = [1,+\infty)$. A függvény grafikonját *láncgörbé*nek is nevezik (2.22. ábra).




2.20. ábra.




2.21. ábra.




2.22. ábra.

Alapvető összefüggések:

*a)* Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

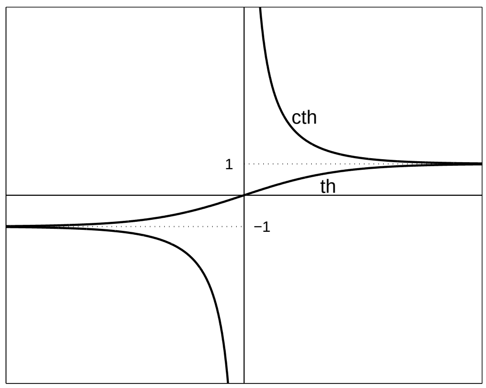
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

*b)* Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{sh}(x_1 + x_2) = \mathrm{sh}\ x_1 \cdot \mathrm{ch}\ x_2 + \mathrm{ch}\ x_1 \cdot \mathrm{sh}\ x_2,$$

$$\mathrm{ch}(x_1 + x_2) = \mathrm{ch}\ x_1 \cdot \mathrm{ch}\ x_2 + \mathrm{sh}\ x_1 \cdot \mathrm{sh}\ x_2.$$

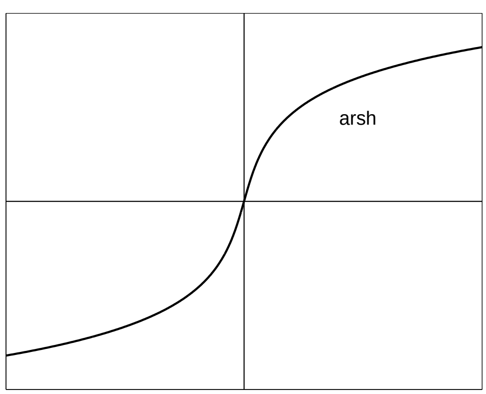
3. Legyen
$$\mathrm{th} := \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}},\ \mathrm{cth} := \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}.$$
Az értelmezésből következik, hogy
$$\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}},$$
$$\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$
A th és cth páratlan függvények (2.23. ábra).




2.23. ábra.

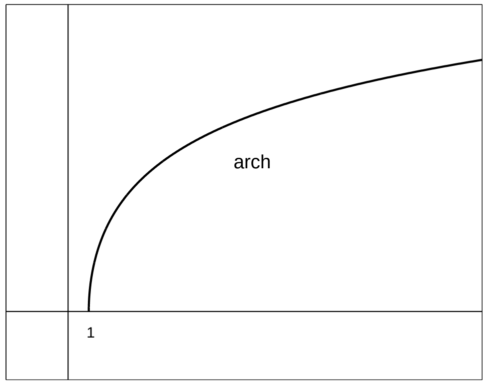
A th szigorúan monoton növő függvény. $\mathcal{R}(\mathrm{th}) = (-1,1)$.
A $\mathrm{cth}|_{\mathbb{R}-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\mathrm{cth}|_{\mathbb{R}+}$ szigorúan monoton növő. $\mathcal{R}(\mathrm{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

4. Az sh szigorúan monoton növő függvény, ezért van inverzfüggvénye: $\mathrm{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\mathrm{arsh} := (\mathrm{sh})^{-1}.$$
Az arsh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.24. ábra).




2.24. ábra.

5. Az ch függvény $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye: $\mathrm{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty)$,
$$\mathrm{arch} := (\mathrm{ch}|_{[0,\infty)})^{-1}.$$
Az arch szigorúan monoton növő függvény (2.25. ábra).

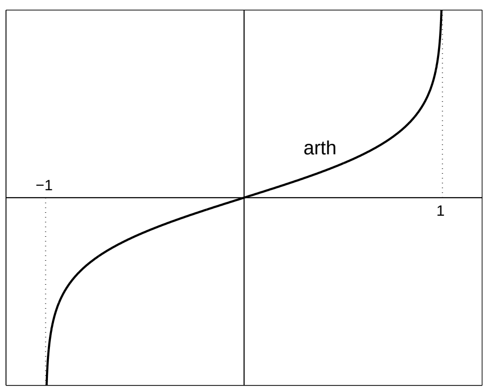



2.25. ábra.

6. Az th szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye: arth : $(-1,1) \to \mathbb{R}$,

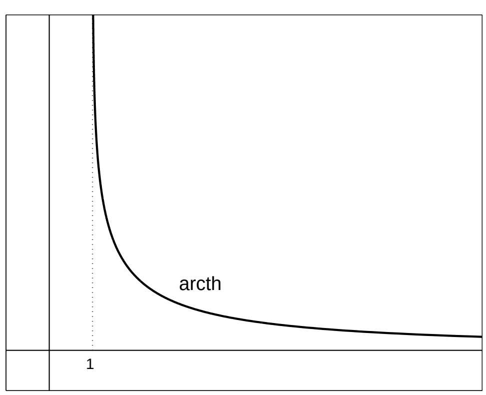
$$\text{arth} := (\text{th})^{-1}.$$

Az arth szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.26. ábra).




2.26. ábra.

7. Az cth függvény $\mathbb{R}^+$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye: arcth : $(1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$,




2.27. ábra.

$$\operatorname{arcth} := (\operatorname{cth}_{|_{\mathbb{R}^+}})^{-1}.$$

Az arcth szigorúan monoton fogyó függvény (2.27. ábra).

**2.11. Feladat.** Lássuk be az alábbiakat!

(a) $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geq 1$,

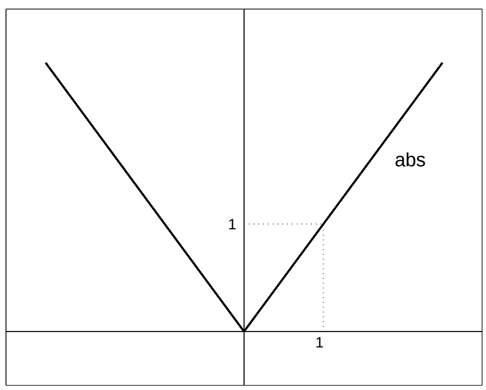
(c) $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1{,}1)$,

(d) $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

### 2.2.5. Néhány különleges függvény

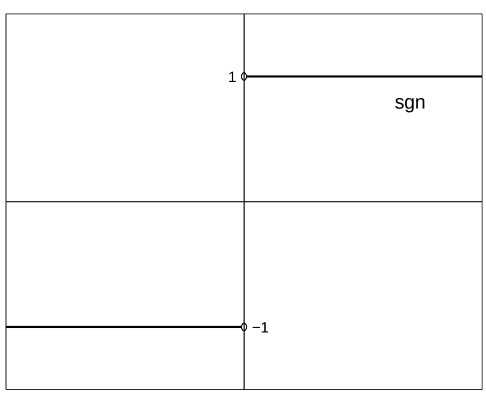
1. Legyen $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \qquad \text{(2.28. ábra)}$$




2.28. ábra.

2. Legyen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,



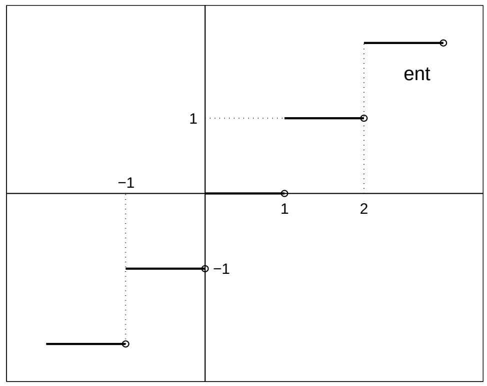

2.29. ábra.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

3. Legyen $\mathrm{ent} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{ent}(x) := [x]$, ahol

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az $x$-nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.) (2.30. ábra)




2.30. ábra.

4. Legyen $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Dirichlet-függvény*nek nevezik, nem is kíséreljük meg a szemléltetését.

5. Legyen $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

ahol $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, és $p$-nek és $q$-nak nincs valódi közös osztója. *Riemann-függvény*nek nevezik, ezt sem kíséreljük meg szemléltetni.

# Harmadik fejezet

# Sorozatok

A sorozatok igen egyszerű függvények. Rajtuk tanulmányozható a közelítés pontossága. Hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

– Sorozat fogalma, monotonitás, korlátosság

– Határérték és konvergencia

– Fontos határértékek

– Határérték és műveletek kapcsolata

– Az $e$ szám definíciója

– Cauchy-féle konvergenciakritérium sorozatra

## 3.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai

A **sorozat** a pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvény.
Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N}^+ \to H$, akkor $H$-beli sorozatról beszélünk. Ha például $H$ a valós számok halmaza, akkor *számsorozat*ról; ha $H$ bizonyos jelek halmaza, akkor jelsorozatról; ha $H$ az intervallumok halmaza, akkor intervallum-sorozatról beszélünk.
Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $a(n)$ helyett az $a_n$ jelölést használjuk, és $a_n$-et a sorozat *$n$-edik tagjának* nevezzük. Magát az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb

$$(a_n)$$

helyettesítse, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hangsúlyozza, hogy számsorozatról van szó.
Például az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az $(\frac{1}{n})$ sorozatról beszélünk.
Néha a tömör $(a_n)$ helyett az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használhatjuk. Például az $(n^2)$ helyett 1, 4, 9, $\ldots, n^2, \ldots$ sorozatról beszélünk.
Mivel a sorozat is függvény, így a korlátosság, a monotonitás, műveletek sorozatokkal nem igényelnek új definíciót. Emlékeztetőül mégis újrafogalmazunk egy-két elnevezést.

**3.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $(a_n)$ sorozat *korlátos*, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$.

**3.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $(a_n)$ *monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

**3.3. Definíció.** Ha $(a_n)$ sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Például az $(\frac{n}{n+1})$ sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Az $(\frac{n}{n+1})$ monoton növő, mert bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1},$$

mivel $n(n+2) < (n+1)^2$.

**3.4. Példa.** Fontos nevezetes sorozat az

$$(e_n) := \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right). \tag{3.1}$$

Ez a sorozat is monoton növő. Ugyanis legyen $n \in \mathbb{N}^+$. A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{n} \leq \left(\frac{1 + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az $(e_n)$ sorozat korlátos is, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Ugyanis szintén a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik a következő:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n} \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

## 3.2. Sorozat véges határértéke

Most a sorozatok egy merőben új tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergensnek fogjuk nevezni. Pontosabban:

**3.5. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ számsorozat *konvergens*, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ ($\varepsilon$-tól függő) küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N},\ n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

másképp

$$a_n \in K_\varepsilon(A). \tag{3.2}$$

Ha van ilyen $A$ szám, akkor ez a sorozat *határértéke* lesz, és

$$\lim a_n = A \text{ vagy } a_n \to A$$

jelöli.

A fenti definícióban nagyon fontos, hogy a (3.2) (vagy az ezzel ekvivalens állítások) *bármely* pozitív $\varepsilon$-ra teljesülnek, de *különböző* $\varepsilon$-okra *más-más* küszöbindextől kezdve.

3.6. *Megjegyzés.* Könnyen látható a definíció alapján, hogy

$$a_n \to A \iff (a_n - A) \to 0 \iff |a_n - A| \to 0.$$

**3.7. Állítás.**

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

*Bizonyítás.* Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\frac{1}{\varepsilon}$ számhoz az *Archimedeszi axióma* alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ha pedig $n \geq N$, akkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

azaz

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Tehát egy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan $N$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén a sorozatelemek legfeljebb $\varepsilon$-al térnek el 0-tól – ezért a sorozat 0-hoz tart. $\square$

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozatához jutunk. Alkalmazva az 1.5. Állítást, a fentivel analóg módon belátható, hogy $\frac{1}{2^n} \to 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.

**3.8. Definíció.** Legyen $(a_n)$ olyan sorozat, melyre $a_n = a$ minden $n$-re. Ekkor $(a_n)$-et *konstans sorozat*nak nevezzük. Ha $a_n = a$ csak egy indextől kezdve teljesül, akkor $(a_n)$ *kvázikonstans* sorozat.

A definíció alapján triviális, hogy ha $(a_n)$ kvázikonstans (vagy konstans) $a$ sorozat, akkor $a_n \to a$.

3.9. *Megjegyzés.* A sorozathatárérték egyértelmű. Tehát nem lehet, hogy $a_n \to A$ és $a_n \to B$ teljesülnek, de $A \neq B$.

*Bizonyítás.* Ha $A \neq B$, akkor $\varepsilon := |A - B|/2$ jelöléssel könnyen látható, hogy $K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$. A sorozathatárérték definíciója alapján azonban elég nagy $n$-re $a_n \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B)$ teljesül, ami nem lehetséges. $\square$

**3.10. Állítás.** *Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, akkor $(a_n)$ korlátos.*

*Bizonyítás.* A definíció szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz is van olyan $N$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |A - 1|, |A + 1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$. $\square$

Igaz-e vajon a fenti állítás megfordítása, vagyis hogy minden korlátos sorozat konvergens is? Tekintsük az $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ képlettel megadott sorozatot! A sorozat tagjai

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

alakúak. Mivel $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}^+$, ezért $(a_n)$ korlátos. Másrészt könnyen meggondolható, hogy mivel a sorozat tagjai között tetszőleges index után előfordul $-1$ és $1$ is, $(a_n)$ nem lehet konvergens. Igaz azonban az alábbi tétel.

**3.11. Tétel.** *Ha $(a_n)$ monoton és korlátos, akkor $(a_n)$ konvergens, mégpedig*

1. *monoton növő $(a_n)$ esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \sup_n a_n \in \mathbb{R}$;*
2. *monoton fogyó $(a_n)$ esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \inf\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \inf_n a_n \in \mathbb{R}$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $(a_n)$ monoton növő és korlátos. A Felső határ axiómája miatt a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak létezik (véges) felső határa, ez legyen $\alpha := \sup_n a_n$. Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$. Ehhez legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. A halmaz felső határának tulajdonságai alapján

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \le \alpha$, és

(b) $\exists N \in \mathbb{N}^+ : \ a_N > \alpha - \varepsilon$.

Belátjuk, hogy a (b) pont alapján létező $N$ jó küszöbindex $\varepsilon$-hoz. Legyen $n \ge N$ tetszőleges, és becsüljük meg a sorozat $n$-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \le a_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy a sorozat monoton növő. Ebből következik, hogy $a_n \to \alpha$.

Monoton fogyó sorozat esetén hasonlóan igazolható, hogy a sorozat a tagjaiból alkotott halmaz infimumához tart. □

**3.12. Definíció.** Az $(e_n) := ((1 + \frac{1}{n})^n)$ sorozatról már láttuk a 3.4. Példában, hogy monoton növő és korlátos, ezért a fenti tétel alapján konvergens. A határértékét e-vel jelöljük, ez az ún. *Euler-féle szám*, tehát

$$\mathrm{e} := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**3.13. Tétel** (Rendőr-elv)**.** *Legyen $(a_n)$ olyan sorozat, amelyhez léteznek olyan $(x_n)$ és $(y_n)$ sorozatok, hogy*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \le a_n \le y_n$, és*
2. *$\lim x_n = \lim y_n =: A$.*

*Ekkor $(a_n)$ konvergens, és $\lim a_n = A$.*

*Bizonyítás.* Legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám.
Mivel $x_n \to A$, ezért $\varepsilon$-hoz létezik $N_1$, hogy minden $n \ge N_1$ esetén

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Mivel $y_n \to A$, ezért $\varepsilon$-hoz létezik $N_2$, hogy minden $n \ge N_2$ esetén

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \ge N$ tetszőleges. Ekkor

$$A - \varepsilon < x_n \le a_n \le y_n < A + \varepsilon,$$

amiből $|a_n - A| < \varepsilon$. Tehát $\varepsilon$-hoz $N$ jó küszöbindex, így következik az állítás. □

3.14. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a fenti tétel 1. feltételében elegendő lett volna megkövetelni, hogy $x_n \le a_n \le y_n$ elég nagy $n$-re.

## 3.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

**3.15. Állítás.** *Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, akkor $a_n + b_n \to 0$.*

*Bizonyítás.* Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám.
Mivel $a_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik $N_1$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $b_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik $N_2$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $|a_n + b_n| < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Tehát $a_n + b_n \to 0$. □

**3.16. Állítás.** *Ha $a_n \to 0$ és $(c_n)$ korlátos (vagyis $|c_n| < K,\ n \in \mathbb{N}^+$), akkor $a_n c_n \to 0$.*

*Bizonyítás.* Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\frac{\varepsilon}{K} > 0$-hoz létezik $N$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Legyen $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$|a_n c_n| = |a_n||c_n| \leq |a_n| \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $a_n c_n \to 0$. □

**3.17. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*

*Bizonyítás.* Nyilván

$$(\lambda a_n - \lambda A) = (\lambda) \cdot (a_n - A).$$

Mivel $a_n - A \to 0$, a $(\lambda)$ korlátos sorozat, ezért az előzőek alapján

$$(\lambda) \cdot (a_n - A) \to 0 \Longleftrightarrow \lambda a_n \to \lambda A.$$

□

**3.18. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy

$$(a_n + b_n - (A + B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \to 0$ és $b_n - B \to 0$, ezért a 3.15. Állítás alapján az összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + b_n \to A + B$. □

**3.19. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$.*

*Bizonyítás.* Egyszerű számolással

$$(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - A b_n + A b_n - AB) = (a_n - A)(b_n) + (A)(b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \to 0$, és $(b_n)$ konvergens, ezért korlátos, így a 3.16. Állítás szerint a szorzatuk 0-hoz tart. Hasonlóan, $b_n - B \to 0$, és $(A)$ korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. A 3.15. Állítás szerint két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \to AB$. □

**3.20. Állítás.** *Ha $b_n \to B,\ B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.*

*Bizonyítás.* A $B \neq 0$ feltételből adódik, hogy $b_n \neq 0$ elég nagy $n$-re. Legyen $B > 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$

Tudjuk, hogy $b_n - B \to 0$. Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel $b_n \to B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz létezik $N$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2},$$

vagyis

$$B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2},$$

amiből

$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel a 3.16. Állítás alapján 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, ezért $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$. □

**3.21. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.*

*Bizonyítás.* Mivel

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right),$$

az előző két tétel szerint

$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B},$$

tehát $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$. □

**3.22. Állítás.** *Ha $a_n \to A$, akkor $|a_n| \to |A|$.*

*Bizonyítás.* Az alábbi egyenlőtlenségből és a 3.13. Tételből (Rendőr-elv) következik:

$$0 \leq ||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

□

**3.23. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $p \in \mathbb{N}^+$, akkor $a_n^p \to A^p$.*

*Bizonyítás.* Rögtön adódik a 3.19. Állítás $p$-szeri alkalmazásából $(b_n) = (a_n)$-re. □

**3.24. Állítás.** *Ha $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n} \to \sqrt[q]{A}$.*

*Bizonyítás.* A hatványozás azonosságaiból könnyen meggondolható az alábbi:

$$\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{A}\right| = |a_n - A| \cdot \frac{1}{(\sqrt[q]{a_n})^{q-1} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-2} \cdot \sqrt[q]{A} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-3} \cdot (\sqrt[q]{A})^2 + \cdots + (\sqrt[q]{A})^{q-1}}.$$

Itt a második tényező $q$ darab pozitív korlátos sorozat összegének a reciproka – tehát korlátos. Ezt megszorozva egy 0-hoz tartó sorozattal 0-hoz tartó sorozatot kapunk, ami a bizonyítandó állítás. □

**3.25. Következmény.** *Legyen $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $p, q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n^p} \to \sqrt[q]{A^p}$.*

*Bizonyítás.* Azonnal adódik a fenti két állításból. □

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

**3.26. Példa.**
$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$
hiszen $\frac{1}{n} \to 0$, ezért a számlálóban $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. A nevezőben $2 + \frac{1}{n} \to 2 + 0 \neq 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

## 3.4. Részsorozatok

**3.27. Definíció.** Egy $\mathtt{n} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növekedő sorozatot *indexsorozat*nak nevezünk.

Könnyen meggondolható, hogy $\forall i \in \mathbb{N}^+$ esetén
$$\mathtt{n}_i \geq i.$$

**3.28. Definíció.** Legyen $a, b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $b$ az $a$ sorozat egy *részsorozata*, ha $\exists \mathtt{n} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ indexsorozat, hogy $b = a \circ \mathtt{n}$, azaz $(b_i) = (a_{\mathtt{n}_i})$.

Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ és $(\mathtt{n}_i) := 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ esetén
$$(a_{\mathtt{n}_i}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$
lesz a részsorozat.

**3.29. Állítás.** *Ha* $\lim a_n = A$*, akkor bármely* $(a_{\mathtt{n}_i})$ *részsorozatára* $\lim a_{\mathtt{n}_i} = A$

*Bizonyítás.* Azonnal adódik a sorozat konvergenciájának definíciójából: adott $\varepsilon > 0$-hoz ugyanaz az $N$ küszöbindex jó lesz a részsorozathoz, is, mivel $\mathtt{n}_N \geq N$. □

**3.30. Tétel.** *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

*Bizonyítás.* Az $(a_n)$ sorozat egy $a_m$ tagját *csúcs*nak nevezzük, ha $\forall n \geq m$ esetén $a_n \leq a_m$. Két eset lehetséges:

1. Az $(a_n)$ sorozat tagjai között végtelen sok csúcs van.
2. Az $(a_n)$ sorozat tagjai között véges sok (esetleg 0) csúcs van.

Nézzük az 1. esetet! Legyen $a_{n_1}$ egy csúcs a sorozatban. Mivel végtelen sok csúcs van, ezért létezik olyan $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2}$ csúcs. Ismét felhasználva, hogy végtelen sok csúcs van a sorozatban, létezik olyan $n_3 > n_2$ index, amire $a_{n_3}$ csúcs. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak csúcsokból álló
$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$
részsorozatát, amely a csúcs definíciója alapján monoton fogyó részsorozata $(a_n)$-nek.

A 2. esetben létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n$ *nem* csúcs. Legyen $n_1 := N$. Mivel $a_{n_1}$ nem csúcs, ezért létezik $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$, a csúcs definíciója miatt. Mivel $a_{n_2}$ sem csúcs, ezért találunk olyan $n_3 > n_2$ indexet, melyre $a_{n_3} > a_{n_2}$. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak egy olyan (csupa nem-csúcsból álló)
$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$
részsorozatát, mely a sorozat tagjainak megválasztása alapján szigorúan monoton növő. □

**3.31. Tétel** (Bolzano-Weierstrass-tétel)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

*Bizonyítás.* A 3.30. Tétel alapján a sorozatnak van monoton részsorozata. Nyilván ez a részsorozat is korlátos lesz. A 3.11. Tétel szerint egy monoton és korlátos sorozat konvergens. □

## 3.5. Sorozat lim sup-ja és lim inf-je

Legyen $(a_n)$ korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}\\
\alpha_2 &:= \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}\\
&\vdots\\
\alpha_k &:= \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

számsorozatot. Mivel $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \supset \{a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, ezért a felső határukra nyilván $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ezt tovább gondolva látszik, hogy $(\alpha_k)$ monoton fogyó sorozat. Az $(\alpha_k)$ ugyanolyan korlátok közé szorítható, mint az eredeti $(a_n)$ sorozat. Mivel $(\alpha_k)$ monoton és korlátos, ezért konvergens, és $\inf\limits_k \alpha_k$-hoz tart (ld. a 3.11. Tételt).

**3.32. Definíció.** $\limsup a_n := \lim \alpha_k$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned}
\beta_1 &:= \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}\\
\beta_2 &:= \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}\\
&\vdots\\
\beta_k &:= \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nyilván $\beta_1 \leq \beta_2$, és ez a tendencia megmarad, így $(\beta_k)$ monoton növő. A $(\beta_k)$ is korlátos. Mivel $(\beta_k)$ monoton és korlátos, ezért konvergens.

**3.33. Definíció.** $\liminf a_n := \lim \beta_k$.

A definíciókból látszik, hogy $\forall k \in \mathbb{N}^+$ esetén $\alpha_k \geq \beta_k$, így

$$\liminf a_n = \lim \beta_k \leq \lim \alpha_k = \limsup a_n.$$

Bizonyítás nélkül megemlítjük a $\limsup a_n$ érdekes tulajdonságait.

(a) Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\limsup a_n) - \varepsilon$ számnál nagyobb tag végtelen sok van az $(a_n)$ sorozatban, a $(\limsup a_n) + \varepsilon$ számnál nagyobb tag csak véges sok van az $(a_n)$ sorozatban.

(b) A $\limsup a_n$ az $(a_n)$ sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \limsup a_n$.)

Értelemszerű módosítással megfogalmazhatók a $\liminf a_n$ tulajdonságai is.

(a) Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\liminf a_n) + \varepsilon$ számnál kisebb tag végtelen sok van az $(a_n)$ sorozatban, a $(\liminf a_n) - \varepsilon$ számnál kisebb tag csak véges sok van az $(a_n)$ sorozatban.

(b) A $\liminf a_n$ az $(a_n)$ sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legkisebb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \liminf a_n$.)

A fentiek segítségével bebizonyítható az alábbi állítás.

**3.34. Tétel.** *Az $(a_n)$ korlátos sorozat konvergens* $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$.

*Bizonyítás.* Ha $(a_n)$ konvergens, akkor a 3.29. Állítás alapján minden részsorozata ugyanoda tart, ezért a konvergens részsorozatok határértékei közül a legnagyobb megegyezik a legkisebbel – így az előző $(b)$ pontok alapján $\liminf a_n = \limsup a_n$.
Megfordítva, ha $\liminf a_n = \limsup a_n = A$, akkor $A$-ra teljesül mindkét fenti $(a)$ tulajdonság, vagyis bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van – ami éppen azt jelenti, hogy $a_n \to A$. □

## 3.6. Cauchy-féle konvergencia-kritérium

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tagjai tetszőlegesen közel kerülnek. Ezt küszöböli ki a Cauchy-féle konvergencia-kritérium.

**3.35. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $(a_n)$ *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ hogy } \ \forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tehát egy sorozat Cauchy-sorozat, ha *bármely* pozitív $\varepsilon$-hoz van olyan küszöbindex, hogy ettől az indextől kezdve a sorozat tagjai $\varepsilon$-nál közelebb vannak egymáshoz.

**3.36. Tétel** (Cauchy-féle konvergencia-kritérium)**.** *Legyen $(a_n)$ számsorozat. Ekkor*

$$(a_n) \textit{ konvergens} \iff (a_n) \textit{ Cauchy-sorozat.}$$

Tehát az, hogy a számsorozat hozzásimul, tetszőlegesen megközelít egy számot, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

*Bizonyítás.* $(\Rightarrow)$ Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz

$$\exists N, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyenek $n, m \geq N$ tetszőleges indexek. Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint $(a_n)$ Cauchy-sorozat.
$(\Leftarrow)$ Legyen $(a_n)$ Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy $(a_n)$ korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m \geq N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m = N_1$ indexet! Így

$$a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n \geq N_1$ esetén a sorozat tagjai a két korlát közé esnek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ véges sok tag már nem ronthatja el az egész $(a_n)$ sorozat korlátosságát.
Mivel $(a_n)$ korlátos, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel miatt van $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim a_{\mathtt{n}_i}.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_{\mathtt{n}_i} \to \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_2$, hogy

$$\forall i \geq N_2 \text{ esetén } |a_{\mathtt{n}_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Mivel $(a_n)$ Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_3$, hogy

$$\forall n, m \geq N_3 \text{ esetén } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Legyen $N := \max\{N_2, N_3\}$, és legyen $n \geq N$ tetszőleges. Rögzítsünk le egy $i \geq n$ indexet – ekkor $\mathtt{n}_i \geq i \geq n \geq N$ is teljesül. A (3.5) alapján és a (3.6)-ban $m = \mathtt{n}_i$-t véve kapjuk, hogy

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{\mathtt{n}_i} + a_{\mathtt{n}_i} - \alpha| \leq |a_n - a_{\mathtt{n}_i}| + |a_{\mathtt{n}_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint $a_n \to \alpha$. □

## 3.7. Divergens sorozatok, sorozatok végtelen határértéke

**3.37. Definíció.** Egy $(a_n)$ sorozatot *divergens*nek nevezünk, ha nem konvergens. Másképp: ha $\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex után $\exists n \geq N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Divergens sorozat például az $(n^2)$ és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az $(n^2)$ sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni.

Korlátos $(a_n)$ sorozat esetén a 3.34. Tétel alapján a divergencia ekvivalens azzal, hogy

$$\limsup a_n \neq \liminf a_n.$$

Könnyen látható, hogy

$$\limsup(-1)^n = 1 \neq \liminf(-1)^n = -1.$$

**3.38. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ számsorozatnak $+\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n > K$, vagyis $a_n \in (K, +\infty)$.
Ha az $(a_n)$ sorozat ilyen, akkor

$$\lim a_n = +\infty \text{ vagy } a_n \to +\infty.$$

Ez a definíció arról szól, hogy a sorozat elég nagy küszöbindextől kezdve ,,közel van" a $+\infty$-hez. Ezért könnyen látható, hogy elég lett volna a feltételt pozitív $K$ számokra megkövetelni. Hasonlóan definiáljuk a $-\infty$-hez tartás fogalmát.

**3.39. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ számsorozatnak $-\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n < K$, vagyis $a_n \in (-\infty, K)$.
Ha az $(a_n)$ sorozat ilyen, akkor

$$\lim a_n = -\infty \text{ vagy } a_n \to -\infty.$$

Könnyen meggondolható, hogy a definíciót elég lett volna negatív $K$ számokra megkövetelni.

Példaként: $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.

3.40. *Megjegyzés.* A fenti definíciókból következik, hogy a sorozathatárérték itt is egyértelmű, hasonlóan a véges határérték esetéhez.

Megmutatjuk, hogy egy $+\infty$-hez tartó sorozat alulról, egy $-\infty$-hez tartó pedig felülről korlátos.

**3.41. Állítás.** *Ha $a_n \to +\infty$, akkor $(a_n)$ alulról korlátos, ha pedig $a_n \to -\infty$, akkor $(a_n)$ felülről korlátos sorozat.*

*Bizonyítás.* Legyen $a_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor $K = 1$-hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > 1$. Legyen

$$L := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 1\}.$$

Világos, hogy $a_n \geq L$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Az $a_n \to -\infty$ eset hasonlóan látható be. □

Jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{3.7}$$

az ún. *kibővített számegyenes*t, tehát a valós számokhoz hozzávéve a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat. Fontos, hogy ez utóbbiak valóban szimbólumok, és nem valós számok!

**3.42. Állítás.** *Ha* $\lim a_n = A$ *($A \in \overline{\mathbb{R}}$), akkor bármely* $(a_{n_i})$ *részsorozatra* $\lim a_{n_i} = A$

*Bizonyítás.* Ugyanúgy belátható, mint a 3.29. Állítás. □

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

**3.43. Állítás.** *Minden monoton sorozatnak van határértéke.*

*Bizonyítás.* Ha a monoton sorozat korlátos, akkor a 3.11. Tétel alapján tudjuk, hogy konvergens. Ha $(a_n)$ nem korlátos, akkor monoton növő esetben ez csak úgy lehet, hogy felülről nem korlátos. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $(a_n)$-nek $K$ nem felső korlátja, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_N > K$. Node $n \geq N$ esetén - a monoton növést kihasználva - kapjuk, hogy

$$a_n \geq a_N > K.$$

Mivel $K$ tetszőleges volt, ebből következik, hogy $a_n \to +\infty$. A monoton fogyó sorozat esete hasonlóan bizonyítható. □

A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, szorzata, hányadosa) nagy körültekintést igényelnek.

**3.44. Tétel** (Végtelen határérték és műveletek)**.** *Az alábbiak teljesülnek az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatokra.*

1. *Ha $a_n \to +\infty$ és $(b_n)$ alulról korlátos (pl. $(b_n)$ konvergens vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to +\infty$.*
2. *Ha $a_n \to +\infty$ és $(b_n)$-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. $(b_n)$ egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*
3. *Ha $a_n \to +\infty$ és $(b_n)$-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. $(b_n)$ egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*
4. *Ha $a_n \to -\infty$ és $(b_n)$ felülről korlátos (pl. $(b_n)$ konvergens vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to -\infty$.*
5. *Ha $a_n \to -\infty$ és $(b_n)$-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. $(b_n)$ egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*
6. *Ha $a_n \to -\infty$ és $(b_n)$-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. $(b_n)$ egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*
7. *Ha $a_n \to +\infty$ vagy $a_n \to -\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$.*
8. *Ha $a_n \to 0$ és $a_n > 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \to +\infty$, ha pedig $a_n < 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.*

*Bizonyítás.* 1. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $K-L$-hez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > K - L$. Tehát $n \geq N$ esetén

$$a_n + b_n > K - L + L = K,$$

amiből következik az állítás.
2. Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ szám és $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $K/L$-hez létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $a_n > K/L$. Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n \geq N$ indexekre

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{L} \cdot L = K,$$

ahol kihasználtuk, hogy $K/L > 0$ és $L > 0$. Így következik az állítás.

A $3-6$. állítások a fentiekkel analóg módon láthatók be.

7. Legyen $a_n \to +\infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $1/\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > 1/\varepsilon$. Ebből

$$\frac{1}{a_n} = \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Ezért $1/a_n \to 0$. Ha $a_n \to -\infty$, akkor $-a_n \to +\infty$, amiből $-\frac{1}{a_n} \to 0$, így $\frac{1}{a_n} \to 0$ következik.
8. Az előzőhöz hasonlóan látható. □

A fentiek alapján könnyen meggondolhatók az alábbi, táblázatba rendezett eredmények sorozatok összegének, szorzatának ill. hányadosának határértékeiről.

**3.45. Állítás.** *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

| | $A \in \mathbb{R}$ | $A = +\infty$ | $A = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $B \in \mathbb{R}$ | $A + B$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $B = +\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $B = -\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

*Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

| | $A > 0$ | $A = 0$ | $A < 0$ | $A = +\infty$ | $A = -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B > 0$ | $A \cdot B$ | 0 | $A \cdot B$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $B = 0$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |
| $B < 0$ | $A \cdot B$ | 0 | $A \cdot B$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $B = +\infty$ | $+\infty$ | ? | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $B = -\infty$ | $-\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

*Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

| | $A > 0$ | $A = 0$ | $A < 0$ | $A = +\infty$ | $A = -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B > 0$ | $A/B$ | 0 | $A/B$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $B = 0$ | ? | ? | ? | ? | ? |
| $B < 0$ | $A/B$ | 0 | $A/B$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $B = +\infty$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |
| $B = -\infty$ | 0 | 0 | 0 | ? | ? |

Ahol a táblázatokban ? szerepel, ott többfajta eshetőség van – ld. gyakorlatok.

A $\pm\infty$-el végzett műveleteket az alapján szokták definiálni, ami a fenti táblázatokban a megfelelő határértékkel rendelkező sorozatok közötti műveletekre érvényes.
A végtelen határérték és a rendezés kapcsolatáról szól az alábbi állítás.

**3.46. Állítás.**

1. *Ha $a_n \to +\infty$ és $(b_n)$ olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \geq a_n$, akkor $b_n \to +\infty$.*

2. *Ha $a_n \to -\infty$ és $(b_n)$ olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \leq a_n$, akkor $b_n \to -\infty$.*

*Bizonyítás.* Házi feladat. □

## 3.8. Sorozatok közép-sorozatai

**3.47. Definíció.** Legyen $(a_n)$ egy pozitív tagú sorozat, vagyis $a_n > 0$ minden $n$-re. Képezzük ekkor $(a_n)$

(a) *számtaniközép-sorozatát* mint

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(b) *mértaniközép-sorozatát* mint

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(c) *harmonikusközép-sorozatát* mint

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

**3.48. Tétel.** *Ha $a_n \to A$ ($A \in \overline{\mathbb{R}}$), akkor a fent definiált közép-sorozatai is mind $A$-hoz tartanak, tehát*

$$A_n \to A, \ G_n \to A, \ \text{és } H_n \to A.$$

*Bizonyítás.* 1. Legyen először $a_n \to 0$. Megmutatjuk, hogy $(A_n)$, $(G_n)$ és $(H_n)$ is 0-hoz tart. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Ekkor $\varepsilon/2$-höz létezik $N_1$ küszöbindex, hogy

$$\forall n \geq N_1 \text{ esetén } |a_n| < \varepsilon/2. \tag{3.8}$$

Rögzítsük le $N_1$-et! Ekkor $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|$ konstans. Ezért $\varepsilon/2$-höz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N_2$ esetén

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} < \varepsilon/2. \tag{3.9}$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ha $n \geq N$, akkor (3.8) és (3.9) alapján

$$\begin{aligned} |A_n| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} \\ &= \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot (n - N_1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot n}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az $A_n \to 0$ állítást. Az 1.9. Tétel alapján

$$0 \leq H_n \leq G_n \leq A_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ezért a 3.13. Tételből (Rendőr-elv) következik, hogy $G_n \to 0$ és $H_n \to 0$ is teljesül.
2. Legyen most $a_n \to A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és mivel $a_n > 0$, azért $A > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} |A_n - A| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nA}{n}\right| \\ &= \left|\frac{a_1 - A + a_2 - A + \cdots + a_n - A}{n}\right| \le \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

A kapott felső becslés a $(b_n) := (|a_n - A|)$ 0-hoz tartó sorozat számtaniközép-sorozata, ami 1. alapján 0-hoz tart. Így $|A_n - A| \to 0$, vagyis $a_n \to A$.
Másrészt $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{A}$, és így az előbbieket az $(\frac{1}{a_n})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{A} \Longrightarrow H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to A.$$

Az 1.9. Tétel és a 3.13. Tétel (Rendőr-elv) miatt $G_n \to A$ is igaz.

3. Már csak az $A = +\infty$ eset van hátra. A 3.45. Állítás 7. pontja alapján $\frac{1}{a_n} \to 0$. Ezért a bizonyítás 1. része miatt

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to 0 \Longrightarrow H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to +\infty,$$

mivel $(H_n)$ pozitív tagú sorozat (ld. a 3.45. Állítás 8. pontja). Kihasználva, hogy $0 < H_n \le G_n \le$ $\le A_n$ és $H_n \to +\infty$, valamint alkalmazva a 3.46. Állítást kapjuk, hogy

$$G_n \to +\infty \text{ és } A_n \to +\infty.$$

□

**3.49. Példa.** Legyen

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi az $(a_n)$ határértéke?

Nyilván

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n}},$$

vagyis $(a_n)$ mértaniközép-sorozata az $(\frac{1}{n})$ sorozatnak. Ezért a fenti tétel alapján $a_n \to 0$.

**3.50. Példa.** Legyen

$$a_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi az $(a_n)$ határértéke?

Vegyük észre, hogy a (3.1)-ben definiált $(e_n)$ sorozatból képezett mértaniközép-sorozat a következő alakú:

$$\sqrt[n]{e_1 \cdot e_2 \cdot \cdots \cdot e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \cdots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}},$$

ami a fenti tétel alapján e-hez tart. Ebből

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \to 1 \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}.$$

## 3.9. Nevezetes sorozathatárértékek

1.
$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

*Bizonyítás.* Ld. a 3.7. Állítást. □

2.
$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

*Bizonyítás.* A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenségből (ld. az 1.9. Tételt) $n \geq 2$-re

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 1 + 0 = 1.$$

Innen a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

3.
$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

*Bizonyítás.* Az Archimedeszi axiómából következik, hogy $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < a < N$. Ezért $n \geq N$ esetén

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a < N \leq n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Innen az előzőek és a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

4.
$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \nexists, & q \leq -1. \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Ha $0 < q < 1$, akkor könnyen látható, hogy $(q^n)$ (szigorúan) monoton fogyó, tehát a 3.11. Tétel szerint az infimumához tart. Ha $a > 0$ infimuma volna, akkor $q^n \geq a$, vagyis $q \geq \sqrt[n]{a}$ volna, amiből határértéket véve $q \geq 1$ – ez ellentmondás. Tehát $q^n \to 0$.

Ha $-1 < q \leq 0$, akkor az előbbiek szerint a sorozat abszolút értéke, így maga a sorozat is 0-hoz tart. Ha $q > 1$, akkor $(\frac{1}{q})^n \to 0$, és ebből $q^n \to +\infty$, mivel a sorozat pozitív tagú. A $q \leq -1$ esetben a sorozatnak van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata. □

5.
$$\lim \left(n^k \cdot q^n\right) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, |q| < 1).$$

*Bizonyítás.* Elég belátni $0 < q < 1$ esetre. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q \to 1 \cdot q = q < 1,$$

ezért elég nagy $n$-re

$$a_{n+1} < a_n,$$

tehát a sorozat (szigorúan) monoton fogyó, így az infimumához tart. Ha $a > 0$ alsó korlátja lenne, akkor

$$a \leq n^k \cdot q^n \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq (\sqrt[n]{n})^k \cdot q$$

volna, amiből határértéket véve

$$1 \le q$$

következne – ez ellentmondás. □

6.

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, a > 1).$$

*Bizonyítás.* Azonnal adódik az előzőből $q = \frac{1}{a}$ jelöléssel. □

7.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1).$$

*Bizonyítás.* Ha $n \ge [a] + 1 =: N$ ($[a]$ az $a$ egészrésze), akkor $\frac{a}{n} < 1$. Így $n > N$-re

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n} \le \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{n} \to 0.$$

Innen a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

8.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

*Bizonyítás.*

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \le \frac{1}{n}$$

és Rendőr-elv. □

9.

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

*Bizonyítás.* Legyen $a_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor, ha $[a_n]$ jelöli az $a_n$ egészrészét,

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $((1 + \frac{1}{n+1})^n)$ ill. $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ egy-egy részsorozata áll, melyek mindegyike e-hez tart, tehát

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \mathrm{e}.$$

Ha $x > 0$, akkor $a_n := \frac{n}{x} \to +\infty$, ezért az előzőek és a 3.58. Állítás alapján

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to \mathrm{e}^x.$$

A negatív $x$ esete hasonlóan gondolható meg. □

10.

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}. \tag{3.10}$$

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy

$$0 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{2n}, \tag{3.11}$$

ahonnan az állítás a Rendőr-elv alapján következik. Fejtsük ki az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kifejezést a Binomiális tétel szerint! Ekkor, kihasználva, hogy $\binom{n}{0} = 1$ és $\binom{n}{1} = n$,

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
= \ & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}\right] \\
= \ & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}\right] \\
= \ & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}\right] \\
= \ & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1)\cdots 1}{n^{n-1}}\right] \\
= \ & \frac{1}{2!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \\
& + \frac{1}{n!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \\
= \ & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A kapott kifejezés nyilvánvalóan pozitív. Továbbá az ún. *általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség*ből következik, hogy tetszőleges $2 \le k \le n$ esetén

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \ge 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k \cdot (k-1)}{2n},$$

tehát

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \ & \le \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - 1 + \frac{k \cdot (k-1)}{2n}\right] \\
& = \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Kihasználva, hogy $(k-2)! \ge 2^{k-3}$, $k \ge 3$, kapjuk:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^{k-3}}\right) \le \frac{1}{2n} \cdot (1+2) = \frac{3}{2n}. \tag{3.14}$$

Egybevetve (3.12)-t, (3.13)-at és (3.14)-et, kapjuk (3.11)-et. □

11.

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

*Bizonyítás.* Ld. a 3.49. Példát. □

12.

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$$

*Bizonyítás.* Ld. a 3.50. Példát. □

## 3.10. Valós számok valós kitevőjű hatványai

Az első fejezet végén volt szó valós számok racionális kitevős hatványairól, amelyeket a középiskolában megismert módon vezettünk be. Most a sorozathatárérték fogalmának ismeretében definiálni tudjuk egy (pozitív) szám tetszőleges valós, így irracionális kitevős hatványát is úgy, hogy a hatványozástól „elvárt” tulajdonságok érvényben maradjanak.

A definícióhoz szükségünk lesz a következő állításokra.

**3.51. Állítás.** *Legyen $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Ha $a > 1$, akkor*

$$a^r < a^s,$$

*ha pedig $0 < a < 1$, akkor*

$$a^r > a^s.$$

*Legyen $0 < a < b$ és $r \in \mathbb{Q}$. Ha $r > 0$, akkor*

$$a^r < b^r,$$

*ha pedig $r < 0$, akkor*

$$a^r > b^r.$$

*Bizonyítás.* Legyen először $a > 1$. A hatványozás azonosságaiból és a valós számok (r6.) rendezési tulajdonságából következik, hogy

$$a^r < a^s \Leftrightarrow 1 < a^{s-r},$$

ezért elég belátni, hogy ha $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, akkor $a^p > 1$. Legyen $p = \frac{n}{m}$, $m \neq 0$. Ekkor

$$a^p = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mivel $a > 1$, azért szintén a hatványozás azonosságaiból és a rendezés (r6.) tulajdonságából következik, hogy $a^n > 1$ is teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt[m]{a^n} \leq 1$. Ekkor az előbbiekhez hasonló meggondolással

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n \leq 1,$$

ami ellentmondás. Tehát $a^p = \sqrt[m]{a^n} > 1$.
Ugyanígy látható be az $0 < a < 1$ eset is.
Ha $0 < a < b$, akkor

$$a^r < b^r \Longleftrightarrow 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^r,$$

ahol $\frac{b}{a} > 1$ és $r > 0$. Ez a bizonyítás első része alapján adódik. Hasonlóan gondolható meg az $r < 0$ eset is. □

Az Archimedeszi axióma következménye lesz az alábbi állítás.

**3.52. Állítás.** *Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor található olyan $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$.*

*Bizonyítás.* Az 1.30. Következmény azt mondja, hogy minden nyílt intervallumban, így az $(x-1, x)$ intervallumban is van racionális szám. Ezért

$$\exists r_1 \in (x-1, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Világos, hogy $(r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)$ egy nyílt intervallum. Ezért igaz, hogy

$$\exists r_2 \in (r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Hasonlóan,

$$\exists r_3 \in (r_2, x) \cap (x - \frac{1}{3}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Folytatva az eljárást, kapjuk racionális számoknak olyan $r_1, r_2, r_3, \ldots$ szigorúan monoton növő sorozatát, melyre

$$0 < x - r_n < \frac{1}{n} \Longrightarrow r_n \to x.$$

□

**3.53. Definíció.** Legyenek $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ekkor a fentiek alapján létezik $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$. A 3.51. Állítás szerint az $(a^{r_n})$ sorozat monoton, és korlátos (hiszen bármely $q > x$, $q \in \mathbb{Q}$ esetén $a^q$ egy felső ill. alsó korlátja, attól függően, hogy $a > 1$ vagy $0 < a < 1$) – tehát konvergens. Definiálja

$$a^x := \lim a^{r_n}.$$

Be kell látnunk még, hogy a fenti definíció nem függ az $(r_n)$ sorozat megválasztásától. Ehhez az alábbi állítást gondoljuk meg, mely az

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0)$$

nevezetes sorozathatárérték általánosítását mondja ki.

**3.54. Állítás.** *Legyen $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to 0$ racionális számokból álló nullsorozat és $a > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$a^{r_n} \to 1.$$

*Bizonyítás.* Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Tudjuk, hogy $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ és ezért a reciproksorozatra $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$. Így $\varepsilon$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$a^{\frac{1}{n}}, a^{-\frac{1}{n}} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon).$$

Speciálisan,

$$a^{\frac{1}{N}}, a^{-\frac{1}{N}} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon). \tag{3.15}$$

Mivel $r_n \to 0$, ezért $\frac{1}{N} > 0$-hoz létezik olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall k \geq K$ esetén

$$-\frac{1}{N} < r_k < \frac{1}{N}.$$

A (3.15)-ből és a 3.51. Állításból kapjuk, hogy $a > 1$ esetén

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Tehát $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindexet, hogy $\forall k \geq K$ esetén $a^{r_k} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon)$, ezért $a^{r_n} \to 1$.
A $0 < a < 1$ eset könnyen meggondolható abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. □

**3.55. Következmény.** *Az $a^x$, $x \in \mathbb{R}$ fenti definíciója nem függ az $x$-hez tartó (szigorúan monoton növő) racionális számokból álló sorozat megválasztásától, tehát tetszőleges $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to x$ szigorúan monoton növő sorozatok esetén $\lim a^{r_n} = \lim a^{q_n}$.*

*Bizonyítás.* Ha $r_n \to x$ és $q_n \to x$ a fenti tulajdonságú, akkor $s_n := r_n - q_n$, $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval $(s_n) \subset \mathbb{Q}$ és $s_n \to 0$. Az előző állítás alapján

$$\frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = a^{r_n - q_n} = a^{s_n} \to 1.$$

Mivel $(a^{r_n})$ és $(a^{q_n})$ is konvergens, ezért a határértékük meg kell egyezzen. □

A sorozathatárérték és műveletek kapcsolatából adódik, hogy a fent definiált valós kitevős hatványozás megőrzi a hatványozás ismert azonosságait.

**3.56. Állítás.** *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a hatványozás azonosságai érvényben maradnak valós kitevős hatványokra is, tehát bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

*Továbbá, érvényben maradnak a 3.51. Állításban kimondott rendezési tulajdonságok is $r, s \in \mathbb{R}$ esetén.*

*Bizonyítás.* Az 1. állítást bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Legyenek $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to y$ tetszőleges szigorúan monoton növő sorozatok. Nyilván $r_n + q_n \to x + y$ és $(r_n + q_n)$ szigorúan monoton növő. A definíció alapján, és kihasználva a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakat:

$$a^x \cdot a^y = (\lim a^{r_n}) \cdot (\lim a^{q_n}) = \lim (a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim a^{r_n + q_n} = a^{x+y},$$

ahol alkalmaztuk a racionális kitevős hatványozás azonosságát. □

Ezen állítás egyik következménye, hogy a továbbiakban, ha $a^x$-et akarjuk közelíteni, vehetünk tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to x$ sorozatot.

**3.57. Következmény.** *Ha $a > 0$ és $x_n \to x$ tetszőleges valós sorozat, akkor*

$$a^{x_n} \to a^x.$$

*Bizonyítás.* A hatványozás azonosságai miatt

$$a^{x_n} \to a^x \Longleftrightarrow \frac{a^{x_n}}{a^x} = a^{x_n - x} \to 1.$$

Tudjuk, hogy $x_n - x \to 0$ és a 3.54. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy $a^{x_n - x} \to 1$ teljesül (a bizonyításban sehol sem használtuk ki, hogy a kitevők racionálisak!). □

Végül belátjuk, hogy a 3.25. Következmény is általánosítható valós kitevőre.

**3.58. Állítás.** *Legyen $(a_n)$ valós számsorozat, $a_n, A > 0$ és $a_n \to A$. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$a_n^x \to A^x.$$

*Bizonyítás.* Legyen először $x > 0$. Elég megmutatni, hogy

$$\frac{a_n^x}{A^x} = \left(\frac{a_n}{A}\right)^x \to 1,$$

ahol

$$b_n := \frac{a_n}{A} \to 1.$$

Belátjuk, hogy $b_n^x \to 1$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor felhasználva, hogy $\frac{1}{x} > 0$, és alkalmazva a 3.56. Állítást

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < 1 < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}.$$

Mivel $b_n \to 1$, ezért létezik $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \geq N$ esetén

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < b_n < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}} \Longrightarrow 1 - \varepsilon < b_n^x < 1 + \varepsilon,$$

hiszen $x > 0$. Tehát bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén

$$b_n^x \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon),$$

ezért $b_n^x \to 1$.
Az $x < 0$ eset következik abból, hogy egy 1-hez tartó sorozat reciproka is 1-hez tart. □

# Negyedik fejezet

# Függvények határértéke és folytonossága

Egy függvény határértéke az $a$ pontban $A$, ha az $a$-hoz közeli helyeken a függvény $A$-hoz közeli értékeket vesz fel. Egy függvény folytonos az $a$ pontban, ha az $a$-hoz közeli helyeken a függvény $f(a)$-hoz közeli értékeket vesz fel. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

– Függvény határértékének és folytonosságának fogalma

– Határérték ill. folytonosság és műveletek kapcsolata

– Végtelenbeli és végtelen határérték

– Egyoldali határérték

– Monoton függvény határértéke

– Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

## 4.1. Torlódási pontok

Az előző fejezet 3.7. Definíciójának megfelelően jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

az ún. *kibővített számegyenest.*

Idézzük fel, hogy az 1.29. Definícióban bevezettük egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *környezetét* mint a

$$K_r(a) = (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot. Bár a $+\infty$ és $-\infty$ nem valós számok, szükségünk lesz a „környezetük” fogalmára, melyeket nem korlátos intervallumokként értelmezünk. Legyen $r > 0$ pozitív szám, ekkor

$$\begin{aligned} K_r(+\infty) &:= \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ K_r(-\infty) &:= \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Világos, hogy a fenti jelöléssel, ha $r > 0$ kicsi és $x \in K_r(+\infty)$, akkor $x$ „közel van” a $+\infty$-hez. Továbbá az is könnyen látható, hogy egy $(a_n)$ sorozat $A \in \overline{\mathbb{R}}$ (véges vagy végtelen) határértékének fogalma a fenti környezetek segítségével egyszerűen definiálható az alábbi módon.

**4.1. Definíció.** Az $(a_n)$ sorozat határértéke $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz létezik } N \in \mathbb{N} \text{ küszöbindex, melyre } \forall n \geq N \text{ esetén } a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Bevezetjük még egy $a$ pont $r > 0$ sugarú ún. *kipontozott környezetét*, mely az $a$-n kívüli pontokat tartalmazza az $r$ sugarú környezetből, vagyis

$$\begin{aligned}
\dot{K}_r(a) &:= (a-r, a) \cup (a+r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R},\\
\dot{K}_r(+\infty) &:= K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),\\
\dot{K}_r(-\infty) &:= K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

**4.2. Definíció.** Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont *torlódási pontja* $H$-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset,$$

vagyis ha az $a$ pont tetszőleges környezete tartalmaz tőle különböző $H$-beli elemet.
Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje $H'$.

Könnyen látható, hogy ha $a \in H'$, akkor $a \in H$ és $a \notin H$ is előfordulhat (pl. $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$ is lehet). Ha $H = \mathbb{N}$, akkor $H' = \{+\infty\}$, továbbá ha $H = [a, b]$, akkor $H' = [a, b]$. Másrészt, ha $H$ véges halmaz, akkor meggondolható, hogy $H' = \emptyset$.
Az alábbi állítás a torlódási pont egy fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

**4.3. Állítás.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

*(i)* $a \in H'$;

*(ii) létezik olyan $(h_n) \subset H$ $H$-beli sorozat, melyre $h_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$ és $h_n \to a$.*

*Bizonyítás.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Tegyük fel, hogy $a \in H'$ teljesül. Legyen

$$h_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap H$$

tetszőleges elem – ilyen a torlódási pont definíciója alapján létezik. Világos, hogy az így kapott $(h_n)$ sorozat kielégíti a kívánalmakat.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Mivel $h_n \to a$, ezért $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $h_n \in K_r(a)$. A feltételek miatt $n \geq N$ esetén $h_n \in \dot{K}_r(a) \cap H$ is teljesül, ezért $\forall r > 0$ esetén $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$, így $a$ valóban torlódási pontja $H$-nak. □

## 4.2. Függvény határértéke

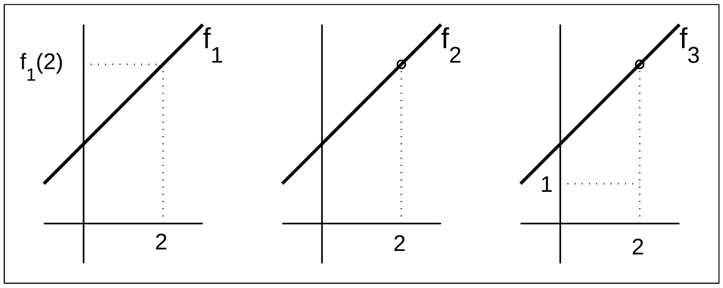
Vizsgáljunk meg három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt!
Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := x + 2,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \quad f_2(x) := \tfrac{x^2-4}{x-2} = \tfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \qquad \text{(4.1. ábra)}$$

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az $f_1$ függvény esetén jól látható, hogy ha $x$ közel van a 2-höz, akkor az $f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.
Az $f_2$ függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha $x$ közel van a 2-höz, az $f_2(x) = x+2$ értékek




4.1. ábra.

egy szám, ebben az esetben a 4 körül keveset ingadoznak.
Az $f_3$ függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha $x$ közel van a 2-höz (de $x \neq 2$), akkor az $f_3(x) = x+2$ értékek (az $f_1$ és $f_2$ függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak (függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$).

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát.

Az $f$ függvény $a$ pontbeli határértékének fogalmát olyan pontokra értelmezzük, melyek „elég közel" vannak az értelmezési tartományhoz, de annak nem feltétlenül elemei – vagyis melyek $\mathcal{D}(f)'$-ben vannak.

**4.4. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *határértéke $a$-ban az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ pont*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

vagyis $a$-hoz „elég közeli" (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak $A$-hoz.
Jelölésben:

$$\lim_a f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, vagyis $a$ az értelmezési tartománynak is eleme, a definíció nem függ a függvény $a$-ban felvett helyettesítési értékétől, $f(a)$-tól!

Továbbá, azért követeltük meg, hogy $a$ az értelmezési tartomány torlódási pontja legyen, hogy így (bármely $\delta > 0$ esetén) a $\dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ tartalmazzon (legalább egy) $x$ elemet.

**4.5. Feladat.** Fogalmazzuk meg a fenti definíció összesen 9 speciális esetét aszerint, hogy $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$, illetve $A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ vagy $A = -\infty$!

Nézzük meg példaként az $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ esetet! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = A \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a, \text{ akkor } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

Nézzük meg az $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ esetet is! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = +\infty \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a, \text{ akkor } f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(Világos, hogy itt $\varepsilon$ helyett $K > 0$-t és $f(x) > K$-t is írhattunk volna.)

A fejezet elején lévő példában

$$\lim_2 f_1 = \lim_2 f_2 = \lim_2 f_3 = 2.$$

Példa végtelen határértékre:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

A kövekező fontos tétel a függvényhatárérték fogalmát „viszi át” sorozathatárérték fogalmára – ezért a neve Átviteli elv.

**4.6. Tétel** (Átviteli elv függvényhatárértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

*(i)* $\lim_a f = A$;

*(ii) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.*

*Bizonyítás.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat (ilyen létezik $a \in \mathcal{D}(f)'$ és a 4.3. Állítás miatt!). Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel $(i)$ szerint $\lim_a f = A$, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A). \tag{4.1}$$

Node $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \neq a$, $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n \geq N$ esetén $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.1) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(A), \quad n \geq N.$$

Tehát adott $\varepsilon$-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$, ezért $f(x_n) \to A$ teljesül.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy $(ii)$ teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy $f$-nek $A$ nem határértéke $a$-ban. Ekkor

$$\exists\varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to A$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$ minden $n$-re), ami ellentmond $(ii)$-nek. □

**4.7. Következmény.** *Adott pontbeli függvényhatárérték egyértelmű. Tehát*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a f = B \Longrightarrow A = B.$$

*Bizonyítás.* Következik a 3.9. és 3.40. Megjegyzésekből és a 4.6. Tételből. □

**4.8. Példa.** Egyszerű példa olyan függvényre, amelynek nem létezik határértéke egy pontban, az előjelfüggvény, azaz legyen

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}.$$

Ennek az $a = 0$ pontban nincs határértéke, hiszen ha $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$, viszont ha $x_n = -\frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$. Viszont könnyen látható, hogy ez a függvény sem „teljesen csúnya”, mert rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $x_n > 0$, $x_n \to 0$, azaz az $(x_n)$ sorozat jobbról tart az $a$ ponthoz, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$. Hasonlóan, ha $x_n < 0$, $x_n \to 0$, azaz az $(x_n)$ sorozat balról tart az $a$ ponthoz, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$.

Az Átviteli elv egy következménye, hogy függvények *véges* határértékére megfogalmazhatunk a sorozat konvergenciájával analóg módon *Cauchy-kritérium*ot (ld. a 3.36. Tételt).

**4.9. Tétel** (Cauchy-kritérium függvényhatárértékre)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$. *A következők ekvivalensek.*

*(i) Létezik* $\lim_a f = A \in \mathbb{R}$.

*(ii) Bármely* $\varepsilon > 0$ *számhoz található olyan* $\delta > 0$, *hogy minden* $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f)$, *esetén* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

*Bizonyítás.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f = A \in \mathbb{R}$. Ez azt jelenti a határérték definíciója szerint, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Ekkor a sorozathatárérték definíciója alapján

$$\forall \delta > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A $(ii)$ feltételből kapjuk, hogy ehhez létezik megfelelő $\delta > 0$ szám. Válasszunk $\delta$-hoz az előbbiek szerinti $N$ küszöbindexet! Ekkor $(ii)$ alapján

$$n, m \geq N \text{ esetén } x_n, x_m \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \;\Rightarrow\; |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Tehát erre az $(x_n)$ sorozatra $(f(x_n))$ sorozat Cauchy-sorozat, így létezik $\lim f(x_n)$ véges határérték. Azt kell meggondolnunk, hogy különböző $(x_n)$ sorozatokra nem kaphatunk különböző határértékeket (tehát minden esetben ugyanaz az $A$ szám lesz a határérték). Legyen $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ sorozat – ehhez található $A \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_n) \to A$. Hasonlóan, legyen $(z_n) \subset D(f)$, $z_n \neq a$, $z_n \to a$. Az előzőek alapján ehhez is található $B \in \mathbb{R}$, hogy $f(z_n) \to B$.
Ekkor „összefésülve" az $(x_n)$ és a $(z_n)$ sorozatot kapjuk, hogy az alábbi sorozat

$$x_1,\, z_1,\, x_2,\, z_2,\, \ldots,\, x_n,\, z_n,\, \ldots$$

$a$-hoz tart. Az előzőek alapján következik, hogy

$$f(x_1),\, f(z_1),\, f(x_2),\, f(z_2),\, \ldots,\, f(x_n),\, f(z_n),\, \ldots$$

sorozat Cauchy-sorozat, azaz konvergens. Mivel a páratlan indexű részsorozata $A$-hoz, a páros indexű $B$-hez tart, ezért a 3.29. Állítás miatt $A = B$. □

A függvényhatárérték és műveletek kapcsolata könnyen meggondolható az Átviteli elv és a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultak alapján (ld. 3.45. Állítás).

**4.10. Állítás** (Függvényhatárérték és műveletek)**.** *Legyenek* $f$ *és* $g$ *valós függvények, legyen* $a \in (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g))'$, *és* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a g = B.$$

*Ekkor*

$$\exists \lim_a |f| = |A|,$$

*továbbá*

$$\begin{aligned} \exists \lim_a (f+g) &= A+B, \ \textit{ha } A+B \textit{ értelmes;} \\ \exists \lim_a (f \cdot g) &= A \cdot B, \ \textit{ha } A \cdot B \textit{ értelmes.} \end{aligned}$$

*Ha $g \neq 0$ az $a$ egy kipontozott környezetében, akkor*

$$\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}, \ \textit{ha } \frac{A}{B} \textit{ értelmes.}$$

*Az $A$ és $B$ közötti műveleteket a 3.45. Állítás alapján értelmezzük.*

*Bizonyítás.* A bizonyítások adódnak a 4.6. Tételből és a 3.45. Állításból. Példaként nézzük meg az $f+g$ határértékének esetét! A 4.6. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \neq a, x_n \to a \text{ akkor } (f+g)(x_n) \to A+B.$$

Mivel $\lim\limits_a f = A$ és $\lim\limits_a g = B$, ezért a 4.6. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \to A \text{ és } g(x_n) \to B.$$

Alkalmazva a 3.45. Állítást kapjuk, hogy ha $A+B$ értelmes, akkor

$$\lim (f+g)(x_n) = \lim \left(f(x_n) + g(x_n)\right) = A+B.$$

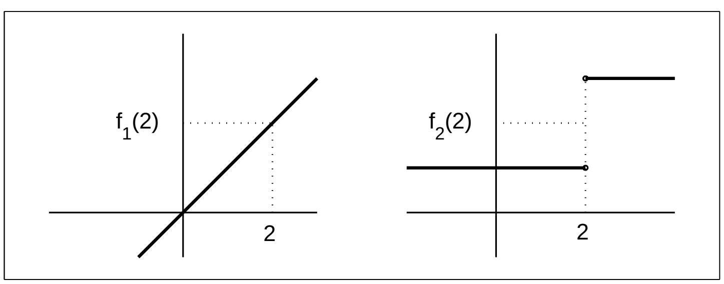
$\square$

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az $f \circ g$ kompozíció-művelet nem viselkedik ilyen jól a függvényhatárértékre nézve.

## 4.3. Függvény folytonossága

Legyen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_1(x) := x$, $a := 2$. Egy másik függvény pedig legyen $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, \ \text{ha } x < 2 \\ 2, \ \text{ha } x = 2 \\ 3, \ \text{ha } x > 2 \end{cases} \qquad \text{(4.2. ábra)}$$




4.2. ábra.

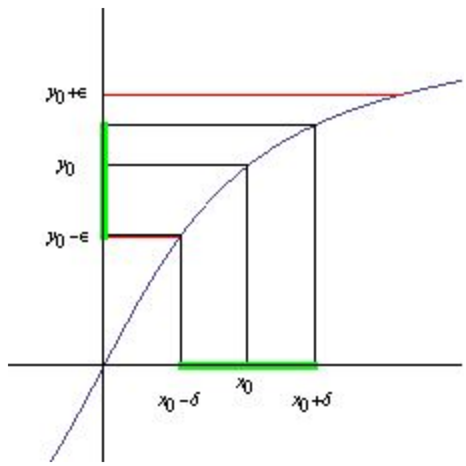
Látható, hogy az $f_1$ függvény olyan, hogy ha $x$ közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az $f_2$ függvényről. Akármilyen $x$ számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz ($x \neq 2$), az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$-nél távolabb). Az $f_1$ függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.

**4.11. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *folytonos $a$-ban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)),$$

vagyis $a$-hoz elég ,,közeli" (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz.
Ha $H \subset \mathcal{D}(f)$ olyan részhalmaz, hogy $f$ minden $a \in H$ pontban folytonos, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *folytonos $H$-n.* Ha $H = \mathcal{D}(f)$, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *folytonos (függvény).*

Figyeljük meg, miben különbözik ez a definíció a függvényhatárérték 4.4. Definíciójától! Most megköveteltük, hogy $a \in \mathcal{D}(f)$ legyen – értelmezési tartományon kívüli pontban nem beszélhetünk a függvény folytonosságáról. Másrészt, a definícióban szereplő $x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ pont $x = a$ is lehet. Erre azonban triviálisan teljesül, hogy $f(x) = f(a) \in K_\varepsilon(f(a))$, mivel itt $A$ helyett $f(a)$ szerepel.




4.3. ábra. $f$ folytonos $x_0$-ban, $f(x_0) = y_0$

**4.12. Állítás.** *Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, akkor*

$$f \text{ folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_a f = f(a).$$

*Bizonyítás.* Rögtön adódik a 4.4. és 4.11. Definíciókból. □

A folytonosság definíciója segítségével a véges helyen vett véges határérték fogalma is újradefiniálható az alábbi módon.

**4.13. Definíció.** Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_a f =: A \in \mathbb{R} \iff \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a \end{cases} \text{ függvény folytonos } a\text{-ban.}$$

Ha például $\mathcal{D}(f)$ intervallum, akkor $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$ teljesül minden pontjára.

Egyszerűen meggondolható, hogy a *Dirichlet-függvény* egyetlen pontban sem folytonos.

4.14. *Megjegyzés.* Ha $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$, akkor $a$ ún. *izolált pontja* $\mathcal{D}(f)$-nek. Könnyen látható a definíció alapján, hogy ilyenkor $f$ mindig folytonos $a$-ban.

**4.15. Tétel** (Átviteli elv függvény folytonosságára)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

*(i) $f$ folytonos $a$-ban;*

*(ii) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(a)$.*

*Bizonyítás.* Analóg módon történik, mint a 4.6. Tételé.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel $(i)$ szerint $f$ folytonos $a$-ban, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy minden } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)). \tag{4.2}$$

Node $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n > N \text{ indexre } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.2) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a)), \quad n > N.$$

Tehát adott $\varepsilon$-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n > N$-re $f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a))$, ezért $f(x_n) \to f(a)$ teljesül.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy $(ii)$ teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy $f$ nem folytonos $a$-ban. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a)).$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to f(a)$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a))$ minden $n$-re), ami ellentmond $(ii)$-nek. □

4.16. *Megjegyzés.* Ha a fenti átviteli elvet akarjuk alkalmazni egy $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$ pontban, akkor a 4.3. Állítás alapján nincs olyan $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$ sorozat, hogy $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$ és $x_n \to a$. Ezért a $(ii)$-ben csak olyan $(x_n)$ sorozatokat vizsgálunk, melynek tagjai egy indextől kezdve megegyeznek $a$-val. Ekkor egy indextől kezdve $f(x_n) = f(a)$, tehát $f(x_n) \to f(a)$ teljesül. Ezzel beláttuk a 4.14. Megjegyzést is.

A függvények közötti műveletek a folytonosságra is ,,jól viselkednek”.

**4.17. Állítás** (Folytonosság és műveletek)**.** *Legyenek $f$ és $g$ valós függvények és $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Tegyük fel, hogy $f$ és $g$ folytonosak $a$-ban. Ekkor*

$$\begin{aligned} &|f|,\\ &f+g,\\ &f \cdot g \text{ és}\\ &\frac{f}{g} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0) \end{aligned}$$

*is folytonosak $a$-ban.*

*Bizonyítás.* A bizonyítások adódnak a 4.15. Tételből és és a sorozatok közötti műveletekről tanultakból. Példaként nézzük meg az $f \cdot g$ folytonosságának esetét! A 4.15. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \to a \text{ akkor } (f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(a).$$

Mivel $f$ és $g$ folytonosak $a$-ban, ezért a 4.15. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \to f(a) \text{ és } g(x_n) \to g(a).$$

Alkalmazva a 3.19. Állítást kapjuk, hogy

$$\lim (f \cdot g)(x_n) = \lim \left( f(x_n) \cdot g(x_n) \right) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

□

## 4.4. Határérték, folytonosság – és kompozíció

Az előző fejezet utolsó tétele a folytonosság és függvények közötti műveletek kapcsolatáról a függvényhatárértékre vonakozó megfelelő tétel analogonja. Van azonban a függvények között lehetséges műveletek között még egy, a *kompozíció* (ld. 1.21. Definíció), melyre folytonosság és határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Kezdjük a folytonosság és függvények közötti kompozíció kapcsolatával.

**4.18. Tétel** (Folytonosság és kompozíció)**.** *Legyenek $f$ és $g$ valós függvények, és tegyük fel, hogy $g$ folytonos az $a \in \mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, $f$ pedig az $g(a)(\in \mathcal{D}(f))$ pontban. Ekkor $f \circ g$ folytonos az $a$ pontban.*

*Bizonyítás.* Az állítást legegyszerűbben a 4.15. Átviteli elv segítségével bizonyíthatjuk. Legyen $x_n \to a$, $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$ tetszőleges sorozat. A $g$ függvény $a$-beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján $g(x_n) \to g(a)$. Az $f$ függvény $g(a)$ pontbeli folytonosságát kihasználva

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a),$$

amiből az állítás következik. □

Próbáljuk meg megfogalmazni a függvényhatárértékre vonatkozó, fentinek megfelelő állítást!

*Hamis Állítás.* Legyenek $f$ és $g$ valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$ és $\exists \lim_b f = c$. Ekkor

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

Egy nagyon egyszerű példán megmutatható, hogy a fenti állítás nem igaz! Legyen

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Legyen $a = 1$. Ekkor $\exists \lim_a g = b = 0$, $\exists \lim_b f = \lim_0 f = c = 1$, de

$$\lim_a (f \circ g) = 2 \neq c = 1!$$

A probléma azzal van, hogy a $g$ függvény „nagyon nem injektív” az $a$ pont környezetében. Ha megpróbálnánk a fenti *Hamis Állítás*t az átviteli elv segítségével bizonyítani, kiderül, ez miért baj. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.6. Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Ebből azonban nem következik (feltétlenül), hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$ – ugyanis nem biztos, hogy $g(x_n) \neq b$ (legalább egy indextől kezdve) teljesül! Épp ez a probléma az előbbi példában is. A következő tétel a helyes állítást fogalmazza meg.

**4.19. Tétel** (Határérték és kompozíció)**.** *Legyenek $f$ és $g$ valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$. Ekkor az alábbi* 1. *és* 2. *állítások bármelyikéből következik, hogy*

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

1. *$b \in \mathcal{D}(f)$ és $f$ folytonos $b$-ben, $f(b) = c$;*
2. *$b \in \mathcal{D}(f)'$ és $\exists \lim\limits_{b} f =: c$, továbbá $a$-nak létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $g(x) \neq b$, ha $x \in \dot{K}(a)$ (pl. $g$ injektív/szigorúan monoton az $a$ egy környezetében vagy $b = \pm\infty$).*

*Bizonyítás.* A bizonyítás lényege, hogy mindkét esetben működik az átviteli elv. Legyen $(x_n) \subset \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.6. Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Továbbá:
1. Mivel $f$ folytonos $b$-ben, ezért $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(b) = c$.
2. Mivel $x_n \in \dot{K}(a)$ egy indextől kezdve, ezért $g(x_n) \neq b$ teljesül elég nagy $n$-re. Így ismét alkalmazva a 4.6. Tételt, $\lim\limits_{b} f = c$ miatt kapjuk, hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$. □

## 4.5. Jobb és bal oldali határértékek

**4.20. Definíció.** Egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *bal oldali környezetén* a

$$K_r^-(a) := (a - r, a]$$

intervallumot értjük. Az $r$ sugarú *jobb oldali környezetén* a

$$K_r^+(a) := [a, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. A $+\infty$-nek csak bal oldali, a $-\infty$-nek csak jobb oldali környezeteit értelmezzük – ezek megegyeznek az eredeti környezetekkel, vagyis

$$\begin{aligned} K_r^-(+\infty) = K_r(+\infty) \quad &:= \quad \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ K_r^+(-\infty) = K_r(-\infty) \quad &:= \quad \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

**4.21. Definíció.** Egy $a$ pont $r > 0$ sugarú *kipontozott bal/jobb oldali környezetein* azon halmazokat értjük, melyek az $a$-n kívüli pontokat tartalmazzák az $r$ sugarú bal/jobb oldali környezetből, vagyis

$$\begin{aligned} \dot{K}_r^-(a) \quad &:= \quad (a - r, a), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \\ \dot{K}_r^+(a) \quad &:= \quad (a, a + r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \\ \dot{K}_r^-(+\infty) \quad &:= \quad K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ \dot{K}_r^+(-\infty) \quad &:= \quad K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

**4.22. Definíció.** Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont *bal (jobb) oldali torlódási pontja* $H$-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r^-(a) \cap H \neq \emptyset \, (\dot{K}_r^+(a) \cap H \neq \emptyset),$$

vagyis ha az $a$ pont tetszőleges bal (jobb) oldali környezete tartalmaz tőle különböző $H$-beli elemet. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz bal ill. jobb oldali torlódási pontjainak halmazát jelölje $H'_-$ ill. $H'_+$.

4.23. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy $H'_- \subset H'$ és $H'_+ \subset H'$, de a fordított irányú tartalmazások nem állnak fent feltétlenül! Például, $H = (a, b)$ esetén $a \in H'$, de $a \notin H'_-$.

Az alábbi állítás a bal/jobb oldali torlódási pont fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

**4.24. Állítás.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

*(i) $a \in H'_-$ ($a \in H'_+$);*

*(ii) létezik olyan* $(h_n) \subset H$ *sorozat, melyre* $h_n < a$ $(h_n > a)$, $n \in \mathbb{N}$ *és* $h_n \to a$.

*Bizonyítás.* Ld. mint a 4.3. Állítás bizonyítása. □

Most definiáljuk $f$ függvény $a$ pontbeli bal/jobb oldali határértékének fogalmát.

**4.25. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'_-$ $(a \in \mathcal{D}(f)'_+)$ az értelmezési tartomány egy bal (jobb) oldali torlódási pontja.
Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *bal (jobb) oldali határértéke* $a$*-ban az* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *pont*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}^-_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \ (x \in \dot{K}^+_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Jelölésben:

$$\lim_{a-0} f = A \text{ vagy } \lim_{a-} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a-0} f(x) = A \text{ ill.}$$
$$\lim_{a+0} f = A \text{ vagy } \lim_{a+} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Világos, hogy $+\infty$-ben csak bal oldali, $-\infty$-ben pedig csak jobb oldali határértéket értelmezhetünk.

**4.26. Állítás.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)'_+$. *Ekkor*

$$\exists \lim_a f \iff \exists \lim_{a-0} f, \exists \lim_{a+0} f \text{ és } \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

*Bizonyítás.* Azonnal adódik a definícióból. □

**4.27. Példa.**

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

A bal/jobb oldali határérték definíciójához hasonló módon értelmezhetjük egy függvény balról ill. jobbról való folytonosságát.

**4.28. Definíció.** Legyen $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)$ $(a \in \mathcal{D}(f)'_+ \cap \mathcal{D}(f))$. Azt mondjuk, hogy $f$ *balról (jobbról) folytonos* $a$*-ban*, ha

$$\exists \lim_{a-0} f = f(a) \quad (\exists \lim_{a+0} f = f(a)).$$

**4.29. Feladat.** Fogalmazzuk meg a függvény bal/jobb oldali határértékére ill. folytonosságára vonatkozó átviteli elvet!

**4.30. Tétel** (Monoton függvények határértékéről)**.** *Minden monoton függvénynek az értelmezési tartománya minden bal (jobb) oldali torlódási pontjában létezik bal (jobb) oldali határértéke, mégpedig:*

1. *ha* $f$ *monoton növő, akkor*

$$\lim_{a-0} f = \sup_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f, \qquad (4.3)$$
$$\lim_{a+0} f = \inf_{(a,+\infty)\cap\mathcal{D}(f)} f,$$

2. *ha* $f$ *monoton fogyó, akkor*

$$\lim_{a-0} f = \inf_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f,$$
$$\lim_{a+0} f = \sup_{(a,+\infty)\cap\mathcal{D}(f)} f.$$

Itt

$$\sup_H f := \sup\{f(x) : x \in H\},$$
$$\inf_H f := \inf\{f(x) : x \in H\}.$$

*Bizonyítás.* A (4.3) esetet bizonyítjuk, a többi hasonlóan meggondolható.
Legyen

$$A := \sup_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f.$$

Be kell látni, hogy $\lim\limits_{a-0} f$ létezik és $= A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A szuprémum definíciója miatt

$$\exists x' \in (-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f) : f(x') \in K_\varepsilon(A)$$

(ha $A$ véges, akkor $A - \varepsilon < f(x') < A$). Mivel $f$ monoton növő, ezért

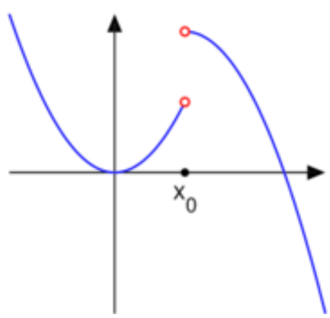
$$\text{ha } x' < x < a \text{ és } x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x') \le f(x) \le A \Rightarrow f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Nyilván $\exists\delta > 0$, melyre $(x', a) = \dot{K}_\delta^-(a)$ (ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\delta := |a - x'|$). Ezzel a $\delta$ választással

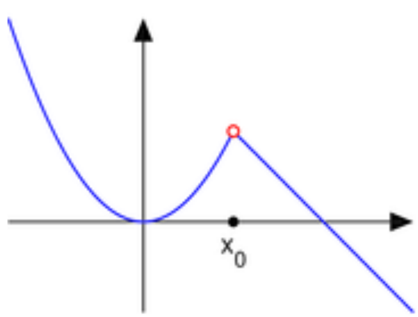
$$x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f)\,(\Leftrightarrow x' < x < a, x \in \mathcal{D}(f)) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

tehát $\lim\limits_{a-0} f = A$. □

A bal és jobb oldali határérték segítségével osztályozhatjuk egy függvény értelmezési tartományának azon pontjait, melyekben nem folytonos.




4.4. ábra. Elsőfajú szakadási hely - ugrás ($f(x_0) = 0$)




4.5. ábra. Megszüntethető szakadási hely ($f(x_0) = 0$)

**4.31. Definíció** (Szakadási pontok osztályozása)**.** Ha $a \in \mathcal{D}(f)$ olyan pont, hogy $f$ nem folytonos $a$-ban, akkor *$a$ szakadási pontja $f$-nek.*
Az $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$ az $f$ *elsőfajú szakadási pontja*, ha

$$\exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \in \mathbb{R}.$$

Ilyenkor

$$u := |\lim_{a+0} f - \lim_{a-0} f|$$

az $f$ *ugrása* $a$-ban.
Az elsőfajú szakadási pont speciális esete a *megszüntethető szakadási pont*, ahol $u = 0$, vagyis

$$\mathbb{R} \ni \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f (= \lim_{a} f \neq f(a)).$$

Az $a \in \mathcal{D}(f)$ *másodfajú szakadási pont*, ha nem elsőfajú.

4.32. *Megjegyzés.* A 4.30. Tételből rögtön adódik, hogy intervallumon értelmezett monoton függvénynek bármely szakadási pontja csak elsőfajú lehet, de nem megszüntethető. (Világos, hogy a monotonitás miatt a létező egyoldali határértékek végesek.)

4.33. *Megjegyzés.* A Dirichlet-függvénynek minden valós szám másodfajú szakadási pontja.

## 4.6. Elemi függvények folytonossága és határértéke

Jelen fejezet tanulmányozásához érdemes visszalapozni a második fejezethez, és az ott szereplő ábrákhoz!

**4.34. Állítás.** *A 2.2.1. fejezetben felsorolt* hatványfüggvények *folytonosak.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 4.15. Átviteli elvet! Legyen $x_n, x \in \mathcal{D}(\mathrm{id}^r)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\mathrm{id}^r(x_n) = x_n^r \to \mathrm{id}^r(x) = x^r.$$

Ez következik a 3.58. Állításból. □

A hatványfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

**4.35. Állítás.** *Ha $n$ páros, akkor*

$$\begin{aligned}
\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n &= \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty, \\
\lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} &= \lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0, \\
\lim_{0} \mathrm{id}^{-n} &= +\infty.
\end{aligned}$$

*Ha $n$ páratlan, akkor*

$$\begin{aligned}
\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n = -\infty, &\qquad \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty, \\
\lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} &= \lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0, \\
\lim_{0-} \mathrm{id}^{-n} = -\infty, &\qquad \lim_{0+} \mathrm{id}^{-n} = +\infty.
\end{aligned}$$

*Továbbá, ha $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az $\mathbb{R}^+$-on értelmezett* $\mathrm{id}^r$ *függvényre*

$$\begin{aligned}
\lim_{+\infty} \mathrm{id}^r &= +\infty, \quad r > 0, \\
\lim_{0+} \mathrm{id}^r &= +\infty, \quad \lim_{+\infty} \mathrm{id}^r = 0, \quad r < 0.
\end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Adódik a 4.6. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából a megfelelő intervallumokon, ld. a 3.56. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

**4.36. Állítás.** *Bármely* $a > 0$, $a \neq 1$ *esetén az* $\exp_a$ exponenciális függvény *(ld.* (2.1)*) folytonos.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 4.15. Átviteli elvet! Legyen $x \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\exp_a(x_n) = a^{x_n} \to \exp_a(x) = a^x.$$

Ez adódik a 3.57. Következményből. □

**4.37. Állítás.** *Bármely* $a > 0$, $a \neq 1$ *esetén a* $\log_a = (\exp_a)^{-1}$ logaritmusfüggvény *folytonos.*

*Bizonyítás.* Következik a 4.52. Tételből (folytonos függvény inverze is folytonos). □

Az exponenciális és logaritmusfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

**4.38. Állítás.** *Bármely* $a > 1$ *esetén*

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} \exp_a &= \lim_{+\infty} \log_a = +\infty, \\ \lim_{-\infty} \exp_a = 0, &\qquad \lim_{0+} \log_a = -\infty. \end{aligned}$$

*Bármely* $0 < a < 1$ *esetén*

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \exp_a &= \lim_{0+} \log_a = +\infty, \\ \lim_{+\infty} \exp_a = 0, &\qquad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty. \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Adódik a 4.6. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából, ld. a 3.56. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

**4.39. Állítás.** *A 2.2.3. fejezetben felsorolt trigonometrikus függvények és inverzeik folytonosak.*

*Bizonyítás.* A 4.6. ábra alapján belátható $|x| < \frac{\pi}{2}$-re ($|x| > \frac{\pi}{2}$-re pedig triviális), hogy

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A 4.15. Átviteli elvet alkalmazzuk. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Ekkor felhasználva, hogy $|\cos| \leq 1$, kapjuk:

$$|\sin x_n - \sin x| = \left|2 \cdot \cos \frac{x_n + x}{2} \cdot \sin \frac{x_n - x}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x_n - x}{2}\right|.$$

A fenti egyenlőtlenség alapján

$$|\sin x_n - \sin x| \leq 2 \left|\frac{x_n - x}{2}\right| = |x_n - x| \to 0, \tag{4.4}$$

és ezt akartuk belátni.
Mivel

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ezért a 4.18. Tétel miatt cos is folytonos. A tg és ctg függvények így két folytonos függvény hányadosaként állnak elő, ezért folytonosak (ld. a 4.17. Állítást). A trigonometrikus függvények inverzeinek folytonossága pedig a 4.52. Tételből adódik. □

Könnyen meggondolható, hogy a sin és cos függvényeknek nincs határértékük $\pm\infty$-ben. Azonban érvényesek az alábbiak:

**4.40. Állítás.**

$$\begin{aligned}
\lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \mathrm{tg} &= +\infty, & \lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \mathrm{tg} &= -\infty,\ k \in \mathbb{Z},\\
\lim_{k\pi-0} \mathrm{ctg} &= -\infty, & \lim_{k\pi+0} \mathrm{ctg} &= +\infty,\ k \in \mathbb{Z},\\
\lim_{-\infty} \mathrm{arctg} &= -\frac{\pi}{2}, & \lim_{+\infty} \mathrm{arctg} &= \frac{\pi}{2},\\
\lim_{-\infty} \mathrm{arcctg} &= \pi, & \lim_{+\infty} \mathrm{arcctg} &= 0.
\end{aligned}$$

**4.41. Állítás.** *A 2.2.4. fejezetben felsorolt hiperbolikus függvények és inverzeik folytonosak.*

*Bizonyítás.* A hiperbolikus függvények folytonossága adódik az exp függvény folytonosságából és a 4.17. Állításból, az inverzeik folytonossága pedig a 4.52. Tételből. □

**4.42. Állítás.**

$$\begin{aligned}
\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty, &\qquad \lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty,\\
\lim_{-\infty} \mathrm{ch} &= \lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty,\\
\lim_{-\infty} \mathrm{th} &= \lim_{-\infty} \mathrm{cth} = -1,\\
\lim_{+\infty} \mathrm{th} &= \lim_{+\infty} \mathrm{cth} = 1,\\
\lim_{0-} \mathrm{cth} = -\infty, &\qquad \lim_{0+} \mathrm{cth} = +\infty.
\end{aligned}$$

*Bizonyítás.* A sh esetét bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Felhasználjuk az exp függvény határértékeit.

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{0-\infty}{2} = -\infty.$$

□

**4.43. Állítás.**

$$\begin{aligned}
\lim_{-\infty} \mathrm{arsh} = -\infty, &\qquad \lim_{+\infty} \mathrm{arsh} = +\infty,\\
&\qquad \lim_{+\infty} \mathrm{arch} = +\infty,\\
\lim_{-1+0} \mathrm{arth} &= \lim_{-1-0} \mathrm{arcth} = -\infty,\\
\lim_{1-0} \mathrm{arth} &= \lim_{1+0} \mathrm{arcth} = \infty,\\
\lim_{-\infty} \mathrm{arcth} &= \lim_{+\infty} \mathrm{arcth} = 0.
\end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Adódik a megfelelő inverzfüggvények határértékeiből. □

## 4.7. Nevezetes függvényhatárértékek

Az alábbi nevezetes függvényhatárértékek bizonyítása mind adódik a 4.19. Tétel megfelelő szereposztással való alkalmazásából.

1.
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

*Bizonyítás.* A 4.6. Tételt alkalmazzuk. Legyen $x_n \to \infty$ tetszőleges sorozat, és tegyük fel, hogy $x_n > 1$ (egy indextől kezdve ez biztos teljesül). Ekkor

$$([x_n])^{\frac{1}{[x_n]+1}} \le (x_n)^{\frac{1}{x_n}} \le ([x_n]+1)^{\frac{1}{[x_n]}} .$$

A bal ill. jobb oldalon az $(n^{\frac{1}{n+1}})$ ill. $((n+1)^{\frac{1}{n}})$ egy-egy részsorozata áll, melyek 1-hez tartanak. Így $(x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to 1$, amiből az állítás következik. □

2.
$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1.$$

*Bizonyítás.* Mivel tetszőleges $x_n \to 0+$ esetén $\frac{1}{x_n} \to +\infty$, ezért az 1. pont alapján

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{x_n^{x_n}} \to 1,$$

így $x_n^{x_n} \to 1$ is teljesül. A 4.6. Tétel alapján kész. □

3.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_c x}{x^p} = 0 \quad (p, c > 0, c \ne 1).$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy ha $p > 0$, akkor $\lim_{x\to\infty} x^p = +\infty$. Alkalmazva a 4.19. Tétel 2. pontját és az 1. nevezetes határértéket kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = 1.$$

Kihasználva a $\log_c$ függvény folytonosságát és a 4.19. Tétel 1. pontját,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_c (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_c x^p}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p \log_c x}{x^p} = \log_c 1 = 0.$$

Ebből $p$-vel való osztás után következik az állítás. □

4.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \quad (a \in (1, +\infty), q > 0).$$

*Bizonyítás.* A fenti 3.-at $p := \frac{1}{q}$ és $c := a$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Tudjuk, hogy $a > 1$ miatt $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. A 4.19. Tétel 2. pontját felhasználva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a a^x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Mivel $\lim_{x\to 0} x^q = 0$, ezért a 4.19. Tétel 1. pontja alapján – tulajdonképpen a fenti határérték $q$. hatványát véve –,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}}\right)^q = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^q}{a^x} = 0.$$

□

5.

$$\lim_{x\to 0+} x^p \log_c x = 0 \quad (p, c > 0, c \neq 1).$$

*Bizonyítás.* Ha $x \to 0+$, akkor $x^p \to 0+$ is teljesül. Felhasználva 2.-t és a 4.19. Tétel 1. pontját, kapjuk:

$$\lim_{x\to 0+}(x^p)^{x^p} = 1.$$

Ismét alkalmazva a 4.19. Tétel 1. pontját és a $\log_c$ függvény folytonosságát,

$$\lim_{x\to 0+}\log_c(x^p)^{x^p} = \lim_{x\to 0+} x^p\cdot\log_c x^p = \lim_{x\to 0+} p\cdot x^p\cdot\log_c x = \log_c 1 = 0.$$

Innen $p$-vel osztva kapjuk a kívánt egyenlőséget. □

6.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

*Bizonyítás.* A 3.9. fejezet 9. pontjának bizonyításában meggondoltak szerint következik. □

7.

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

*Bizonyítás.* Legyen $t_n \to 0$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $(\frac{1}{t_n})$ sorozat vagy $+\infty$-hez tart, vagy $-\infty$-hez, vagy két olyan részsorozatból áll össze, melyek egyike $+\infty$-hez, a másik $-\infty$-hez tart. A 6. pont alapján ezért

$$(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{t_n}}\right)^{\frac{1}{t_n}} \to \mathrm{e},$$

és ezt kellett megmutatni. □

8.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log_c(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln c} \quad (c > 0, c \neq 1).$$

*Bizonyítás.* Mivel $\log_c$ folytonos, ezért alkalmazva a 4.19. Tétel 1. pontját és a fenti 7. határértéket:

$$\lim_{t\to 0}\log_c(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\log_c(1+t)}{t} = \log_c \mathrm{e} = \frac{1}{\ln c}.$$

□

9.

$$\lim_{x\to a}\frac{\log_c x - \log_c a}{x-a} = \frac{1}{a\cdot\ln c} \quad (a, c > 0, c \neq 1).$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy
$$x \to a \Longleftrightarrow \frac{x}{a} - 1 \to 0.$$
A 4.19. Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján
$$\lim_{x\to a} \frac{\log_c(1 + \frac{x}{a} - 1)}{\frac{x}{a} - 1} = \lim_{x\to a} a \cdot \frac{\log_c x - \log_c a}{x - a} = \frac{1}{\ln c}.$$
Ebből $a$-val osztva adódik az állítás. □

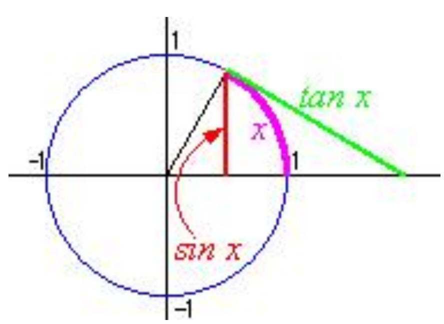
10.
$$\lim_{x\to 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c \quad (c > 0, c \neq 1).$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy
$$x \to 0 \Longleftrightarrow c^x - 1 \to 0.$$
A 4.19. Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_c(1 + c^x - 1)}{c^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{c^x - 1} = \frac{1}{\ln c}.$$
Ebből reciprokot véve adódik az állítás. □

11.
$$\lim_{x\to a} \frac{c^x - c^a}{x - a} = c^a \cdot \ln c \quad (c > 0, c \neq 1).$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy
$$x \to a \Longleftrightarrow x - a \to 0.$$
A 4.19. Tétel 2. pontja és a 10. határérték alapján
$$\lim_{x\to a} \frac{c^{x-a} - 1}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{c^a} \cdot \frac{c^x - c^a}{x - a} = \ln c.$$
Ebből $c^a$-nal szorozva adódik az állítás. □

12.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$




4.6. ábra.

*Bizonyítás.* A 4.6. ábra alapján meggondolható, hogy

$$\sin x < x < \tan x, \text{ ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

adódik, és felhasználva a cos függvény 0 pontbeli folytonosságát, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

egyenlőség alapján

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is igaz, így az állítást bizonyítottuk. □

**4.44. Állítás.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$ és tegyük fel, hogy $\exists \lim_a f = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$\exists \lim_{x\to a} g(x) \cdot (f(x) - 1) =: b.$$

*Ekkor*

$$\exists \lim_a f^g = \lim_b \exp = \begin{cases} \mathrm{e}^b, & b \in \mathbb{R}; \\ 0, & b = -\infty; \\ +\infty, & b = +\infty. \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel először, hogy $a$-nak létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $f(x) \neq 1$, $x \in \dot{K}(a)$. Világos, hogy $\lim_a f = 1$ miatt $\dot{K}(a)$-t úgy is megválaszthatjuk, hogy ott $f > 0$. Ekkor

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot \ln f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot(f(x)-1)\cdot \frac{\ln f(x)}{f(x)-1}}, \quad x \in \dot{K}(a)$$

A 8. nevezetes határérték alapján

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Alkalmazva az $f(x) - 1$ belső függvénnyel való helyettesítést (ez megtehető, mivel $f(x) \neq 1$, $x \in \dot{K}(a)$, ld. a 4.19. Tétel 2. pontja) kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{f(x) - 1} = 1.$$

Mivel $\lim_{x\to a} g(x) \cdot (f(x) - 1) = b$, ezért

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\cdot(f(x)-1)\cdot \frac{\ln f(x)}{f(x)-1}} = \lim_{y\to b} \mathrm{e}^y.$$

Másrészt, ha $f$ az $a$-hoz tetszőlegesen közel felvesz 1-t, akkor szükségszerűen $b = 0$, $f^g$ pedig az $a$ közelében 1, így $a$-beli határértéke is $1 = \mathrm{e}^0$. □

**4.45. Példa.** Számítsuk ki az

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x \quad (c\in\mathbb{R})$$

határértéket! A fenti szereposztással:

$$f(x) := \frac{x-c}{x+c}, \quad g(x) := x, \quad a := +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-c}{x+c} = 1$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\cdot(f(x)-1) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-c}{x+c}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2c\cdot x}{x+c} = -2c =: b.$$

Így

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x = \mathrm{e}^{-2c}.$$

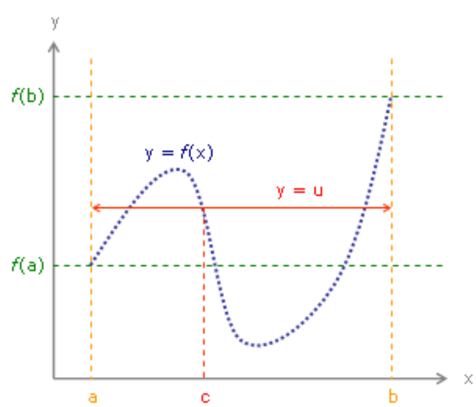
## 4.8. Folytonos függvények tulajdonságai

Ebben az alfejezetben intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságaival foglalkozunk, ezért az alábbiakban az $f : I \to \mathbb{R}$ jelölés alatt mindig $\mathcal{D}(f) = I$-t értünk. Az első fontos eredményt egyszerűbben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy intervallumon folytonos függvény grafikonjának lerajzolásakor ,,nem emeljük fel a ceruzát".

**4.46. Tétel** (Bolzano-Darboux-tétel)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor ha $u \in \mathbb{R}$ olyan, hogy*

$$f(a) < u < f(b) \quad (\textit{vagy } f(b) < u < f(a)),$$

*akkor létezik $c \in (a,b)$, melyre $f(c) = u$.*




4.7. ábra. Bolzano-Darboux-tétel

*Bizonyítás.* Legyen például $f(a) < u < f(b)$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$H := \{x \in [a,b] : f(x) < u\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$, ugyanis $a \in H$. Másrészt $H$ felülről korlátos, mivel $H \subset [a,b]$, tehát $b$ egy felső korlátja. Így a Felső határ axiómája miatt $H$-nak van legkisebb felső korlátja, $\sup H \in \mathbb{R}$. Legyen

$$c := \sup H.$$

$H \subset [a, b]$ miatt $c \in [a, b]$ teljesül. A szupremum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists x_n \in H : c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Az így kapott $(x_n) \subset H$ sorozatra nyilván $x_n \to c$ igaz. Alkalmazva $f$-re a 4.15. Átviteli elvet, kapjuk, hogy

$$f(x_n) \to f(c).$$

Mivel $f(x_n) < u$ minden $n$-re, ezért $f(c) \leq u$. Indirekt tegyük fel, hogy $f(c) < u$. Jelölje

$$\varepsilon := \frac{u - f(c)}{2} > 0,$$

ekkor $u > f(c) + \varepsilon$. Az $f$ függvény $c$-beli folytonosságát kihasználva,

$$\text{az } \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \text{ esetén } f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon).$$

Válasszunk egy $x \in (c, c+\delta) \cap [a, b]$ számot! A $c = \sup H$ definíció miatt $x \notin H$. Másrészt a fentiek alapján

$$(f(c) - \varepsilon <)\, f(x) < f(c) + \varepsilon < u$$

kellene teljesüljön, amiből viszont $x \in H$ következik – ez ellentmondás. □

Ennek a tételnek egy fontos következménye, hogy intervallum folytonos függvénnyel vett képe is intervallum.

**4.47. Következmény.** *Ha $f$ egy tetszőleges $I$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor $f$* Darboux-tulajdonságú, *azaz bármely $J \subset I$ intervallum esetén*

$$f(J) := \{f(x) : x \in J\}$$

*intervallum.*

*Bizonyítás.* Legyen $f$ egy $I$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, és legyen $J \subset I$ intervallum. Be kell látni, hogy $f(J)$ is intervallum, vagyis az intervallum 1.27. Definíciója szerint

$$\text{bármely } y_1 < u < y_2, \;\; y_1, y_2 \in f(J) \text{ esetén } u \in f(J).$$

Mivel $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$ valamely $a, b \in J$ számokra, továbbá $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (hiszen $[a, b] \subset J \subset I$), ezért alkalmazhatjuk a Bolzano-Darboux-tételt. Ennek alapján

$$\exists c \in (a, b) \subset J, \text{ melyre } f(c) = u,$$

vagyis $u \in f(J)$, és ezt akartuk belátni. □

**4.48. Következmény** (Bolzano-tétel)**.** *Ha $f$ olyan, intervallumon értelmezett folytonos függvény, mely felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor $f$-nek van gyöke (nullhelye) az intervallumban.*

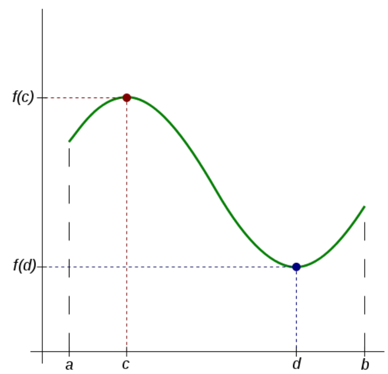
*Bizonyítás.* A feltétel szerint léteznek olyan $a, b \in I$ számok, melyekre $f(a) < 0 < f(b)$. A Bolzano-Darboux-tétel alapján $\exists c \in (a, b)$ (vagy $c \in (b, a)$), melyre $f(c) = 0$. □

Ha egy halmaz infimuma/szupremuma eleme a halmaznak, akkor azt mondjuk, hogy ez a halmaz *minimuma/maximuma.* Hasonlóan definiálhatjuk egy függvény minimumát/maximumát mint az értékkészletének megfelelő elemét.

**4.49. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, hogy

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \geq f(x_0) \text{ (ill. } f(x) \leq f(x_0)),$$

akkor $f(x_0)$ az $f$ *minimuma* (ill. *maximuma*).




4.8. ábra. Weierstrass-tétel

**4.50. Tétel** (Weierstrass-tétel)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor $f$-nek van minimuma és maximuma.*

*Bizonyítás.* A 4.47. Következmény alapján $\mathcal{R}(f) = f([a,b])$ intervallum. Jelölje $m := \inf \mathcal{R}(f)$ és $M := \sup \mathcal{R}(f)$. Azt kell belátni, hogy $m, M \in \mathcal{R}(f)$. Az infimum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists y_n \in \mathcal{R}(f) : m \leq y_n < m + \frac{1}{n}.$$

A kapott $(y_n)$ sorozatra $y_n \to m$ teljesül. Mivel $y_n \in \mathcal{R}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, ezért léteznek $x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ számok, melyekre $f(x_n) = y_n$. Így

$$f(x_n) \to m.$$

A kapott $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata, $(x_{\mathrm{n}_i})$. Legyen

$$d := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a,b].$$

A 4.15. Átviteli elv alapján az $f$ függvény $d$-beli folytonosságából adódik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(d) = m,$$

mivel $(f(x_{\mathrm{n}_i}))$ részsorozata az $m$-hez tartó $(f(x_n))$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $f(d) = m \in \mathcal{R}(f)$. Az $M$ esete ezzel analóg módon gondolható meg. □

**4.51. Következmény.** *Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete korlátos és zárt intervallum.*

*Bizonyítás.* Azonnal adódik a 4.47. Következményből és a 4.50. Weierstrass-tételből. □

A következő tételben azt gondoljuk meg, hogy milyen tulajdonságú egy (intervallumon értelmezett) folytonos függvény inverze.

**4.52. Tétel** (Folytonos függvény inverze)**.** *Legyen $f$ egy $I$ intervallumon értelmezett folytonos és injektív függvény. Ekkor $f$ szigorúan monoton. Továbbá, az $f^{-1}$ inverz függvény*

- *is intervallumon van értelmezve;*
- *szigorúan monoton ugyanúgy, mint $f$;*
- *folytonos.*

*Bizonyítás.* Először meggondoljuk, hogy ha $f$ folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton. Tegyük fel indirekt, hogy

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3, \text{ hogy } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2),$$

(az összes többi ,,rossz” eset hasonlóan gondolható meg).
Mivel $[x_1, x_2] \subset I = \mathcal{D}(f)$ és $f(x_1) < u := f(x_3) < f(x_2)$, ezért a 4.46. Bolzano-Darboux-tétel alapján

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(c) = u = f(x_3).$$

Ez azonban ellentmond $f$ injektivitásának, ugyanis $c < x_3$.
Most lássuk be az inverzfüggvényre vonatkozó állításokat!

- A 4.47. Következmény alapján $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ intervallum.
- Legyenek $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ számok, és tegyük fel, hogy $f$ szigorúan monoton növő. Ekkor a létező $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ számokra nyilván

  $$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

  teljesül. A szigorúan monoton fogyó eset hasonlóan meggondolható.
- Indirekt tegyük fel, hogy $y$ az $f^{-1}$ egy szakadási pontja. Mivel $f^{-1}$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 4.32. Megjegyzés alapján $y$-ban csak elsőfajú, nem megszüntethető szakadása lehet. Ez azonban azt jelentené, hogy $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$ nem volna intervallum, ami ellentmondás. Tehát $f^{-1}$ folytonos.

□

Az alábbiakban a folytonosságnak egy fontos speciális esetét definiáljuk, amikor egy halmaz pontjaiban a folytonosság definíciója alapján $\varepsilon > 0$-hoz létező $\delta$ nem függ a pont helyétől.

**4.53. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *egyenletesen folytonos $H$-n*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**4.54. Példa.** Az $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en. Az $f(x) = x^2$ azonban nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en. Később látni fogjuk, hogy viszont ez a függvény is egyenletesen folytonos bármely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon.

**4.55. Példa.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *Lipschitz-tulajdonságú*nak mondjuk, ha létezik olyan $L > 0$ konstans, hogy

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|, \quad x, y \in \mathcal{D}(f).$$

Egy Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos $\mathcal{D}(f)$-en, ugyanis ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választással, $x, y \in \mathcal{D}(f)$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Lipschitz-tulajdonságú például az id és a sin (ld. a (4.4) becslést $x_n = y$-ra) $L = 1$ konstanssal.

**4.56. Állítás.** *Ha $f$ egyenletesen folytonos $H$-n, akkor folytonos is $H$-n.*

*Bizonyítás.* Legyen $a \in H$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ adva. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ezzel a $\delta$ választással, a fentit $y = a$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ami épp az $a$-beli folytonosságot jelenti. □

A 4.54. Példában láttuk, hogy az állítás megfordítása általában nem igaz, tehát van olyan $H$ halmaz és $H$-n folytonos függvény, mely nem egyenletesen folytonos. A kövekező tétel azt mondja ki, hogy ha $H$ korlátos és zárt intervallum, akkor ez az eset nem állhat fenn.

**4.57. Tétel** (Heine-tétel)**.** *Ha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, akkor* $f$ *egyenletesen folytonos* $[a, b]$*-n.*

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük fel, hogy $f$ nem egyenletesen folytonos $[a, b]$-n. Ez a definíció alapján a következőt jelenti:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0 \text{ esetén } \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b],\ |x_\delta - y_\delta| < \delta, \text{ melyre } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk megfelelő $x_n, y_n \in [a, b]$ pontokat $\delta = \frac{1}{n} > 0$-hoz minden $n \in \mathbb{N}$-re! Így kaptunk olyan $(x_n), (y_n) \subset [a, b]$ sorozatokat, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel szerint létezik konvergens részsorozata, $(x_{\mathrm{n}_i})$. Legyen

$$x := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a, b].$$

Az $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ miatt $(y_{\mathrm{n}_i})$ is konvergens és

$$x = \lim y_{\mathrm{n}_i}.$$

A 4.15. Átviteli elv alapján az $f$ függvény $x$ pontbeli folytonosságából következik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(x) \text{ és } f(y_{\mathrm{n}_i}) \to f(x),$$

ami ellentmondás, hiszen

$$|f(x_{\mathrm{n}_i}) - f(y_{\mathrm{n}_i})| \geq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}.$$

□

# Ötödik fejezet

# Sorok

A sorokra akkor van szükségünk, mikor végtelen sok számot akarunk összeadni. A sorok tulajdonképpen speciális alakú, véges összegekből álló sorozatok. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

– Sor konvergenciája, összege

– Konvergenciakritériumok sorokra

– Sorok Cauchy-szorzata

## 5.1. Végtelen sorok

Vegyünk egy 1 méteres rudat. A harmadik, sorozatokról szóló fejezetben meggondoltak szerint ha a rudat félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ldots,\ \frac{1}{2^n},\ldots$$

sorozatához jutunk. Most gondoljunk arra, hogy valaki a rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

„összeget" szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$-hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így a kapott rúd $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$ hosszú lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$ hosszút kap, és így tovább. A kapott összegekből álló sorozatot fogjuk végtelen sornak nevezni.

**5.1. Definíció.** Legyen $(a_n)$ egy adott sorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ S_3 := a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

összegek sorozatát. A kapott $(S_n) := (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ sorozatot *(végtelen) sor*nak nevezzük, és $\sum a_n$-nel jelöljük, azaz

$$\sum a_n := (S_n).$$

Itt $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a sor $n$. *részletösszege* vagy *szelete.*

A végtelen sor tehát egy speciális alakú sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens.

**5.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, ha az $(S_n)$ sorozat konvergens. $\sum a_n$ *divergens*, ha az $(S_n)$ sorozat divergens.

Ha az $(S_n)$ sorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor a $\sum a_n$ *végtelen sor összegén* a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

**5.3. Példa.** *Mértani sor*
Legyen $q \in \mathbb{R},\ |q| < 1$. Tekintsük a $(q^n)$ összeadandó sorozatot! Az $n$-edik részletösszeg $(n \geq 0)$:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ezért

$$\lim S_n = \lim \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}.$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a végtelen sor összege.
Ha $q \geq 1$, akkor a fenti részletösszegre $S_n \to \infty$ teljesül, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

Ha pedig $q \leq -1$, akkor a $\sum q^n$ sornak nem létezik összege.

**5.4. Példa.** A (3.10) nevezetes határérték tulajdonképpen az alábbi sorösszeget jelenti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

A véges sok szám összeadására teljesülő azonosságok közül a végtelen sorok összegére teljesül az asszociativitás, valamint, hogy konstanst kiemelhetünk belőle. A végtelen sorok szorzatára (és a szorzat megfelelő definiálására) vonatkozó szabályok már bonyolultabbak, erről a fejezet végén ejtünk néhány szót.

**5.5. Tétel** (Sorok összege és műveletek)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}},$$

$c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

*(a)*

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

*(b)*

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B, \text{ ha az összeg értelmes.}$$

*Bizonyítás.* Jelölje $S_n := a_1 + \cdots + a_n$, $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. A feltételek szerint $\lim S_n = A$, $\lim T_n = B$.
$(a)$ A $\sum(c \cdot a_n)$ sor $n$. szeletére

$$U_n = (c \cdot a_1) + \cdots (c \cdot a_n) = c \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = c \cdot S_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = \lim U_n = c \cdot \lim S_n = c \cdot A = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$(b)$ A $\sum(a_n + b_n)$ sor $n$. szeletére

$$V_n = (a_1 + b_1) + \cdots (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = S_n + T_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim V_n = \lim S_n + \lim T_n = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

A részletösszegek sorozata – így a sor – pontosan akkor konvergens, ha teljesül rá a Cauchy-kritérium.

**5.6. Tétel** (Cauchy-kritérium sorokra)**.** *A* $\sum a_n$ *sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > m \geq N \text{ esetén } |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 3.36. Tételt az $(S_n)$ sorozatra, és használjuk fel, hogy

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n|, \quad n > m.$$

□

A Cauchy-kritériumból következik, hogy ha egy sor konvergens, akkor a tagjaiból álló sorozat 0-hoz tart.

**5.7. Állítás.** *Ha* $\sum a_n$ *konvergens, akkor* $a_n \to 0$.

*Bizonyítás.* Mivel $\sum a_n$ egy konvergens sor, ezért az $(S_n)$ sorozat konvergens. A fenti Cauchy-kritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N$ küszöbindex, hogy minden $m \geq N$ és $n := m + 1 > N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \to 0$. □

Fontos megjegyeznünk, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz! Ehhez az alábbi példákat gondoljuk meg.

**5.8. Példa.** Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$, vagyis tekintsük a

$$\sum \ln \frac{n+1}{n}$$

sort! Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, ezért

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n} \to \ln 1 = 0.$$

Másrészt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1).$$

Mivel $\ln(n+1) \to \infty$, ezért $(S_n)$ nem korlátos, így $\sum a_n$ nem konvergens.

**5.9. Példa.** *Harmonikus sor*
Tekintsük a

$$\sum \frac{1}{n}$$

végtelen sort! Tudjuk, hogy $\frac{1}{n} \to 0$. Megmutatjuk, hogy a $\sum \frac{1}{n}$ sor nem konvergens. Az 5.6. Tételt alkalmazzuk. Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén $m = N$ és $n = 2N$ választással

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = \left|\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N}\right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát a $\sum \frac{1}{n}$ sorra nem teljesül a Cauchy-kritérium, így nem konvergens.

A gyakorlatban előfordulnak az ún. abszolút konvergens sorok.

**5.10. Definíció.** A $\sum a_n$ *abszolút konvergens*, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

**5.11. Állítás.** *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

*Bizonyítás.* Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, ezért az 5.6. Tétel alapján $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, hogy $\forall n > m \geq$ $\geq N$ esetén

$$||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| = |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\sum a_n$ sorra is teljesül a Cauchy-kritérium ugyanezen küszöbindexszel, hiszen

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens. □

## 5.2. Konvergenciakritériumok

A gyakorlatban sokszor nehéz eldönteni egy-egy sor konvergenciáját a definíció vagy a Cauchy-kritérium alapján. Másrészt, általában a sor összegének értékére nincs szükségünk, csak annak ismeretére, hogy konvergens-e. Az alábbiakban néhány olyan tétellel ismerkedünk meg, melyek hasznosak lehetnek sorok konvergenciájának/divergenciájának meghatározásához. A tételeket pozitív ($\geq 0$) tagú sorokra mondjuk ki, majd általánosítjuk tetszőleges előjelű tagokból álló sorokra.

Először azt gondoljuk meg, hogy egy pozitív tagú sornak mindig létezik összege.

**5.12. Állítás.** *Ha $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

*mindig létezik, mégpedig $A \in \mathbb{R}$ (tehát a sor konvergens), ha a részletösszegeiből álló $(S_n)$ sorozat felülről korlátos, és $A = +\infty$, ha $(S_n)$ felülről nem korlátos.*

*Bizonyítás.* Következik abból, hogy ilyenkor $(S_n)$ monoton növő sorozat, tehát alkalmazható a 3.43. Állítás: $(S_n)$ határértéke véges vagy $+\infty$, attól függően, hogy felülről korlátos vagy nem. □

**5.13. Következmény.** *Az 5.9. Példában a harmonikus sor összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Az 5.12. Állítás alapján az alábbi, pozitív tagú sorokra kimondott konvegenciakritériumok esetében mindig elegendő azt vizsgálni, hogy a részletösszegekből álló sorozat felülről korlátos vagy nem. Az első az ún. összehasonlító vagy majoráns- ill. minoránskritérium.

**5.14. Tétel** (Összehasonlító kritérium)**.** *Legyen* $0 \le a_n \le b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

*(a) Ha* $\sum b_n$ *konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*

*(b) Ha* $\sum a_n$ *divergens, akkor* $\sum b_n$ *divergens.*

*Bizonyítás.* Legyen $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $T_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az előbbiek alapján $(S_n)$ és $(T_n)$ monoton növő sorozatok. Továbbá, a feltétel szerint

$$S_n \le T_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

(a) Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor ez azt jelenti, hogy $(T_n)$ konvergens, tehát felülről korlátos. Az (5.1) miatt ilyenkor $(S_n)$ is felülről korlátos, tehát konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.

(b) Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $(S_n)$ felülről nem korlátos. Az (5.1) miatt ilyenkor $(T_n)$ sem korlátos felülről, tehát divergens, így $\sum b_n$ divergens.

□

5.15. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a fenti tételben elég lett volna megkövetelni, hogy $a_n \le b_n$ egy $N$ indextől kezdve teljesüljön.

**5.16. Példa.** *Hiperharmonikus sorok*
Az 5.9. Példa alapján a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens. Gyakorlatokon láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} &\ge \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ ha } \alpha \le 1; \\ \frac{1}{n^\alpha} &\le \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ ha } \alpha \ge 2, \end{aligned}$$

ezért az 5.14. Tétel alapján

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^\alpha} &\text{ divergens, ha } \alpha \le 1; \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} &\text{ konvergens, ha } \alpha \ge 2. \end{aligned}$$

**5.17. Feladat.** * Igazoljuk, hogy

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens, ha } \alpha > 1!$$

A továbbiakban a hányados- és gyökkritériummal ismerkedünk meg.

**5.18. Tétel** (D'Alambert-féle hányadoskritérium)**.** *Legyen* $(a_n)$ *adott sorozat,* $a_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$.

*(a) Ha* $\exists q \in (0,1)$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q, \quad n \ge N,$$

*akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*

*(b) Ha* $\exists q > 1$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q, \quad n \ge N,$$

*akkor* $\sum a_n$ *divergens.*

*Bizonyítás.* Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $(a)$ feltételből

$$\begin{aligned}
\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{N+1} \leq a_N \cdot q \\
\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot q \leq a_N \cdot q^2 \\
&\vdots \\
\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{N+k} \leq a_{N+k-1} \cdot q \leq \ldots \leq a_N \cdot q^k.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}
S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} \\
&\leq L + a_N + a_N \cdot q + a_N \cdot q^2 + \ldots + a_N \cdot q^k \\
&= L + a_N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + a_N \cdot \frac{1}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3. Példából, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
Tehát $(S_n)$ felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.
A $(b)$ feltétel esete hasonlóan meggondolható.

□

5.19. *Megjegyzés.* A hányadoskritérium feltételei teljesülnek, ha

(a)
$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0,1),$$

illetve

(b)
$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

**5.20. Tétel** (Cauchy-féle gyökkritérium)**.** *Legyen $(a_n)$ adott sorozat, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

*(a) Ha $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*
$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$
*akkor $\sum a_n$ konvergens.*

*(b) Ha $\exists q > 1$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*
$$\sqrt[n]{a_n} \geq q, \quad n \geq N,$$
*akkor $\sum a_n$ divergens.*

*Bizonyítás.* Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $(a)$ feltételből

$$\begin{aligned}
\sqrt[N]{a_N} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_N \leq q^N \\
\sqrt[N+1]{a_{N+1}} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{N+1} \leq q^{N+1} \\
&\vdots \\
\sqrt[N+k]{a_{N+k}} \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{N+k} \leq q^{N+k}.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}
S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} \\
&\leq L + q^N + q^{N+1} + \ldots + q^{N+k} \\
&= L + q^N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + q^N \cdot \frac{1}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3. Példából, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
Tehát $(S_n)$ felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.
A $(b)$ eset hasonlóan gondolható meg. □

5.21. *Megjegyzés.* A gyökkritérium feltételei teljesülnek, ha

(a)

$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q \in [0,1),$$

illetve

(b)

$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1.$$

Ha a fenti kritériumokat tetszőleges előjelű sorokra akarjuk alkalmazni, akkor a sor tagjainak abszolút értékére kell őket vonatkoztatni.

**5.22. Állítás.** *Tegyük fel, hogy $(a_n)$ és $(b_n)$ tetszőleges előjelű sorozatok. Ekkor az 5.14., 5.18. és 5.20. Tételek feltételeit a $\sum |a_n|$ ill. $\sum |b_n|$ sorra alkalmazva, mindegyik tételben az*

*(a) feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ abszolút konvergens, így konvergens; a*

*(b) feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ divergens – kivéve, az 5.14. Tételben csak a $\sum |a_n|$ divergenciáját állíthatjuk.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás az $(a)$ esetben megegyezik a korábbi tételek bizonyításával. A $(b)$ feltétel esetében az 5.18. és az 5.20. Tételek alkalmazásakor meggondolható, hogy $(|a_n|)$, így $(a_n)$ sem tarthat 0-hoz. □

**5.23. Feladat.** Adjunk példát olyan konvergens ill. divergens sorra, melyről sem a hányados- sem a gyökkritérium alapján nem dönthető el, hogy konvergens-e! (Tehát ezek a kritériumok messze nem szükséges feltételt adnak.)

**5.24. Feladat.** Lássuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra az 5.18. Tétel (hányadoskritérium) valamelyik feltétele teljesül, akkor az 5.20. Tétel (gyökkritérium) megfelelő feltétele is teljesül rá!
Adjunk példát olyan sorra, melynek a gyökkritérium alapján eldönthető a konvergenciája, a hányadoskritérium alapján azonban nem! Tehát az előbbi állítás megfordítása nem igaz, így a gyökkritérium ténylegesen erősebb a hányadoskritériumnál.

**5.25. Példa.** A $\sum \frac{1}{n}$ divergens és a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetén is

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

teljesül. Tehát az 5.19. és az 5.21. Megjegyzésben a feltételek élesek.

Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

**5.26. Tétel** (Leibniz-tétel)**.** *Legyen $(a_n)$ szigorúan monoton fogyó, $a_n \to 0$. Ekkor a*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

*végtelen sor konvergens.*

*Bizonyítás.* Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{array}{ll}
S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\
S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\
\vdots & \vdots \\
S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k}
\end{array}$$

Mivel $a_n > 0$ minden $n$-re, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &> S_2 \\ S_3 &> S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &> S_{2k}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_{2k-1} > a_{2k} > \ldots$, kapjuk az alábbit

$$S_1 > S_3 > \ldots > S_{2k-1} > \ldots \text{ és } S_2 < S_4 < \ldots < S_{2k} < \ldots$$

Ebből következik, hogy $(S_{2k-1})$ és $(S_{2k})$ is monoton, korlátos sorozat, tehát konvergens (ld. a 3.11. Tételt). Mivel $S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k}$, ezért

$$\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0,$$

hiszen $a_n \to 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A \in \mathbb{R},$$

amiből következik, hogy $(S_n)$ is konvergens, $\lim S_n = A$, tehát $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens. □

A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, így

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \leq a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$|S_n - A| \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.

**5.27. Definíció.** Ha egy sor kielégíti a Leibniz-tétel feltételeit, vagyis

$$\sum(-1)^{n+1}a_n$$

alakú, ahol $(a_n)$ szigorúan monoton fogyó, $a_n \to 0$, akkor *Leibniz-sor*nak nevezzük.

**5.28. Példa.** A

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, így a Leibniz-tétel szerint konvergens. Azonban nem abszolút konvergens, mert láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

**5.29. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

## 5.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata

**5.30. Definíció.** Egy $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót ($p$ kölcsönösen egyértelmű és $\mathcal{R}(p) = \mathbb{N}$) a *természetes számok permutációjá*nak nevezünk.

Például a $3,2,1,6,5,4,\ldots,3k+3,3k+2,3k+1,\ldots$ sorozat egy permutációja a természetes számoknak. Világos, hogy egy permutáció egyben egy sorozat is, ezért a

$$p(n) = p_n, \quad n \in N$$

jelölést fogjuk használni.

**5.31. Definíció.** Legyen adva az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozat. Azt mondjuk, hogy $(b_n)$ az $(a_n)$ sorozat egy *átrendezése*, ha létezik $p$ permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.

A következő két tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

**5.32. Tétel.** *Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens sor. Ekkor minden $p$ permutáció esetén $\sum a_{p_n}$ is abszolút konvergens, sőt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő kommutativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

**5.33. Tétel.** *Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor.*

1. *Minden $A \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $p$ permutáció, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A.$$

2. *Létezik olyan $p$ permutáció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.*

A következőkben technikai okokból a sorozatok tagjait $n = 0$-tól kezdve sorszámozzuk.

**5.34. Definíció.** Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzat*án azt a $\sum c_n$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formálisan a Cauchy-szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorzunk.

**5.35. Tétel** (Mertens-tétel)**.** *Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens és $\sum b_n$ konvergens végtelen sor. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens, továbbá*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, gondoljuk meg az alábbi lemmát!

**5.36. Lemma.** *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens végtelen sor és $(x_n)$ nullsorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_n x_0) = 0.$$

*Bizonyítás.* Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk egy $K$ pozitív számot, melyre

$$|x_n| \le K,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le K. \tag{5.2}$$

Mivel $x_n \to 0$, a $\sum |a_n|$ sorra pedig teljesül az 5.6. Cauchy-kritérium, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } |a_{N+1}| + ... + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad n > N. \tag{5.3}$$

Ha $n > 2N$, akkor $n-k > N$ minden $0 \le k \le N$ esetén, ezért (5.2) és (5.3) alapján

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} a_k x_{n-k}\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{N} |a_k|\cdot|x_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k|\cdot|x_{n-k}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2K}\cdot\sum_{k=0}^{N}|a_k| + K\cdot\sum_{k=N+1}^{n}|a_k| < \frac{\varepsilon}{2K}\cdot K + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

*Bizonyítás. (Mertens-tételé)*
Jelölje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n := B \in \mathbb{R}.$$

Be kell lássuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = A \cdot B.$$

Legyen $S_n := a_0 + a_1 + \cdots a_n$, $T_n := b_0 + b_1 + \cdots b_n$. Ekkor $\lim S_n = A$ és $\lim T_n = B$. Felírva a Cauchy-szorzat $n$. részletösszegét, átalakítások után az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned} V_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0T_n + a_1T_{n-1} + \cdots + a_nT_0 \\ &= a_0\cdot(T_n - B) + a_1\cdot(T_{n-1} - B) + \cdots + a_n\cdot(T_0 - B) + (a_0 + a_1 + \cdots a_n)\cdot B \\ &= [a_0\cdot(T_n - B) + a_1\cdot(T_{n-1} - B) + \cdots + a_n\cdot(T_0 - B)] + S_n\cdot B.\end{aligned}$$

Mivel a $(x_n = T_n - B)$ sorozat 0-hoz tart, ezért az 5.36. Lemma alapján a kapott összeg 1. (szögletes zárójelben lévő) tagja 0-hoz tart. Az 2. tag pedig definíció szerint $A \cdot B$-hez tart, amivel a tételt beláttuk.[1] □

**5.37. Példa.** Könnyen látható (akár a hányados-, akár a gyökkritérium segítségével), hogy a

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki a

$$\sum \frac{x^n}{n!} \text{ és } \sum \frac{y^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokra! Az 5.34. Definíció alapján a $\sum c_n$ szorzatsor $n$. tagja

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k},$$

ami az 1.8. Binomiális tétel alapján

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Tehát a két sor Cauchy-szorzatára

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

teljesül.

[1] A bizonyítás Szilágyi Tivadartól származik.

## 5.4. A sorok néhány alkalmazásáról

### 5.4.1. Végtelen tizedestörtek

A valós számok középiskolából ismert végtelen tizedestört-előállítása

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad a_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in \{0,1,\dots,9\}, n \geq 1$$

tulajdonképpen egy végtelen sorösszeg:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{5.4}$$

Kérdések:

1. Ha adva van egy ilyen sor, miért konvergens?
2. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, hogyan kapjuk meg az előállítását?
3. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, egyértelmű-e az előállítás?

1. Mivel

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}, \quad n \geq 1,$$

ezért az 5.14. Összehasonlító kritérium és a $\sum \frac{1}{10^n}$ mértani sor konvergenciája miatt az (5.4) sorelőállítás mindig konvergens.

2. Válasszuk meg az $a_0 \in \mathbb{Z}$ számot úgy, hogy

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_0 \geq 0$ (az $a_0 < 0$ eset hasonlóan gondolható meg). Válasszuk meg az $a_1 \in \{0,1,\dots,9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10^1}.$$

Válasszuk meg az $a_2 \in \{0,1,\dots,9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Tovább folytatva, az $n$. lépésben válasszuk meg az $a_n \in \{0,1,\dots,9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Mivel az

$$s_n := a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozatra (5.5) alapján

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül, ezért $s_n \to x$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = x.$$

3. Tegyük fel indirekt, hogy $x$ előáll mint

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k},$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$ az első olyan index, melyre $a_n \neq b_n$. Feltehető, hogy $a_n < b_n$, és mivel egész számokról van szó, $a_n + 1 \leq b_n$, tehát

$$a_0 = b_0, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n + 1 \leq b_n.$$

Ekkor az (5.5)-öt $(b_n)$-re és $(a_n)$-re alkalmazva

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} \leq b_0 + \frac{b_1}{10^1} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

ami ellentmondás.
Meggondolható, hogy a fenti eljárással a végtelen sok 9-esre végződő tizedestört-alakokat zártuk ki.

### 5.4.2. Az e szám irracionális

Az 5.4. Példában meggondoltak alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

A (3.10) bizonyításában láttuk, hogy

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}, \; p, q \in \mathbb{Z}^+, q \geq 2.$$

Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelöléssel $s_n \to \mathrm{e}$ szigorúan monoton növő módon. Legyen $n > q$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 &\leq q! \cdot (s_n - s_q) = q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdot\cdots\cdot n} \\
&= \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+2} + \cdots + \frac{1}{(q+2)\cdot\cdots\cdot n}\right) \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$0 \leq q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) \leq \frac{1}{2}.$$

Másrészt, az indirekt feltevés alapján

$$0 \leq q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q\right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) \in \mathbb{Z},$$

ami ellentmondás.

# Tárgymutató