3. mérés - A lineáris erőtörvény vizsgálata és a rugóállandó meghatározása

Mérést végezte: Márkus Bence Gábor
Mérőtárs neve: Fekete Balázs András

Mérés dátuma: 2010/11/15
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2010/11/22

A mérés célja:

Kísérletileg igazolni az $F = Dx$ összefüggést és a mért adatokból kiszámolni a D direkciós erőt 2 különböző rugóra.

A mérés során használt eszközök:

- Állvány melyhez mérést könnyítő, elmozdítható két műanyag lap van felszerelve
- Fémvonalzó
- Két, különböző direkciós erejű rugó
- Digitális stopper
- Mathematica és Origin programok görbeillesztéshez

A mérés rövid ismertetése:

A mérést két módon kellett elvégezni: Első esetben statikus módon mértünk: le kellett mérni a rugó hosszát nyújtatlan állapotban. Ezt úgy végezzük, hogy beállítjuk az első műanyag lapot a rugón található kis nyilacskához, majd bizonyos mennyiségű tömeg ráakasztása után ($50g$-tól $300g$-ig mérve $50g$-os lépésekben) beállítjuk a megnyúlt hosszhoz a másik műanyagot és illesztjük. A vonalzóról leolvassuk a két távolságot, az adatok különbsége pedig pont a rugó megnyúlását fogja megadni. Az így kapott direkciós erőt a második mérésünkkel tudjuk igazolni, ami abból áll, hogy a rugót a ráakasztott testtel együtt harmonikus rezgőmozgásba hoztuk és tíz periódusnak mértük le az idejét. Az így kapott periódusidőből aztán ki tudjuk számolni szintén a D direkciós állandót. Itt is $50g$-tól $300g$-ig mértem $50g$-os lépésekben.

A mért adatok és számított eredmények:

Foglaljuk először táblázatba a statikus módszerrel mért adatokat és számítsuk ki a D direkciós állandót (átlagokból és grafikusan is görbeillesztéssel) Tudjuk még, hogy a görbénknek át kell mennie az origón, ezért $\Delta x_0 = 0cm$, $m_0 = 0g$ pontokat is az adatok közé kell vennünk. Számításaink során g-t vegyük $9.81\frac{m}{s^2}$-nek.

D úgy számítható, hogy mivel a test nyugalomban van az alábbi összefüggés lesz igaz:

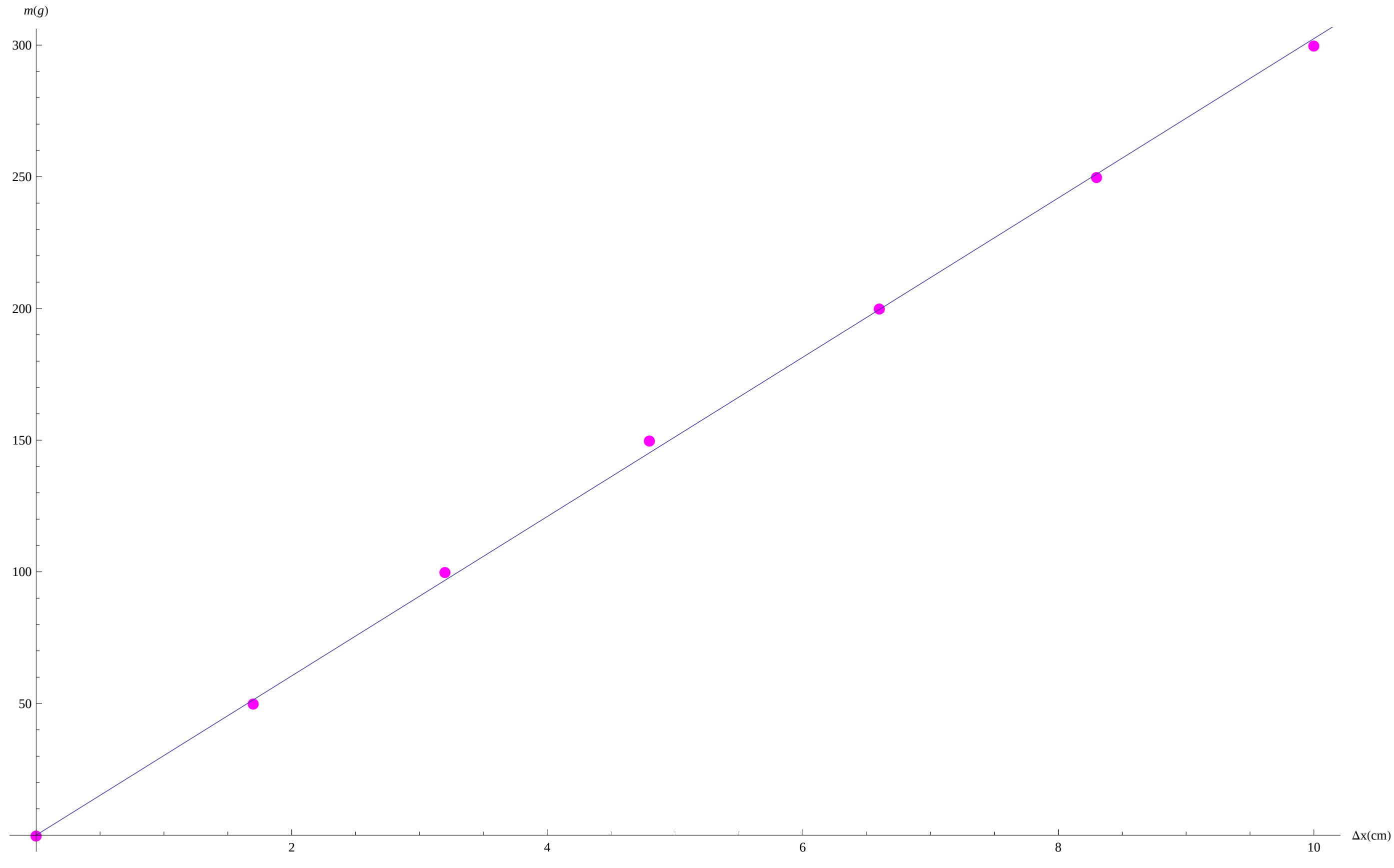
$$mg = D\Delta x$$
$$D = \frac{mg}{\Delta x}$$

Mérések az első rugóra

m	Δx	D
$0g$	$0cm$	$\emptyset$
$50g$	$1.7cm$	$28.853\frac{N}{m}$
$100g$	$3.2cm$	$30.656\frac{N}{m}$
$150g$	$4.8cm$	$30.656\frac{N}{m}$
$200g$	$6.6cm$	$29.727\frac{N}{m}$
$250g$	$8.3cm$	$29.548\frac{N}{m}$
$300g$	$10.0cm$	$29.430\frac{N}{m}$

Ahol a hosszmérés hibája $\delta x = 0.05cm$. Az átlag direkciós állandó pedig $\overline{D_{sz1}} = 29.812\frac{N}{m}$.

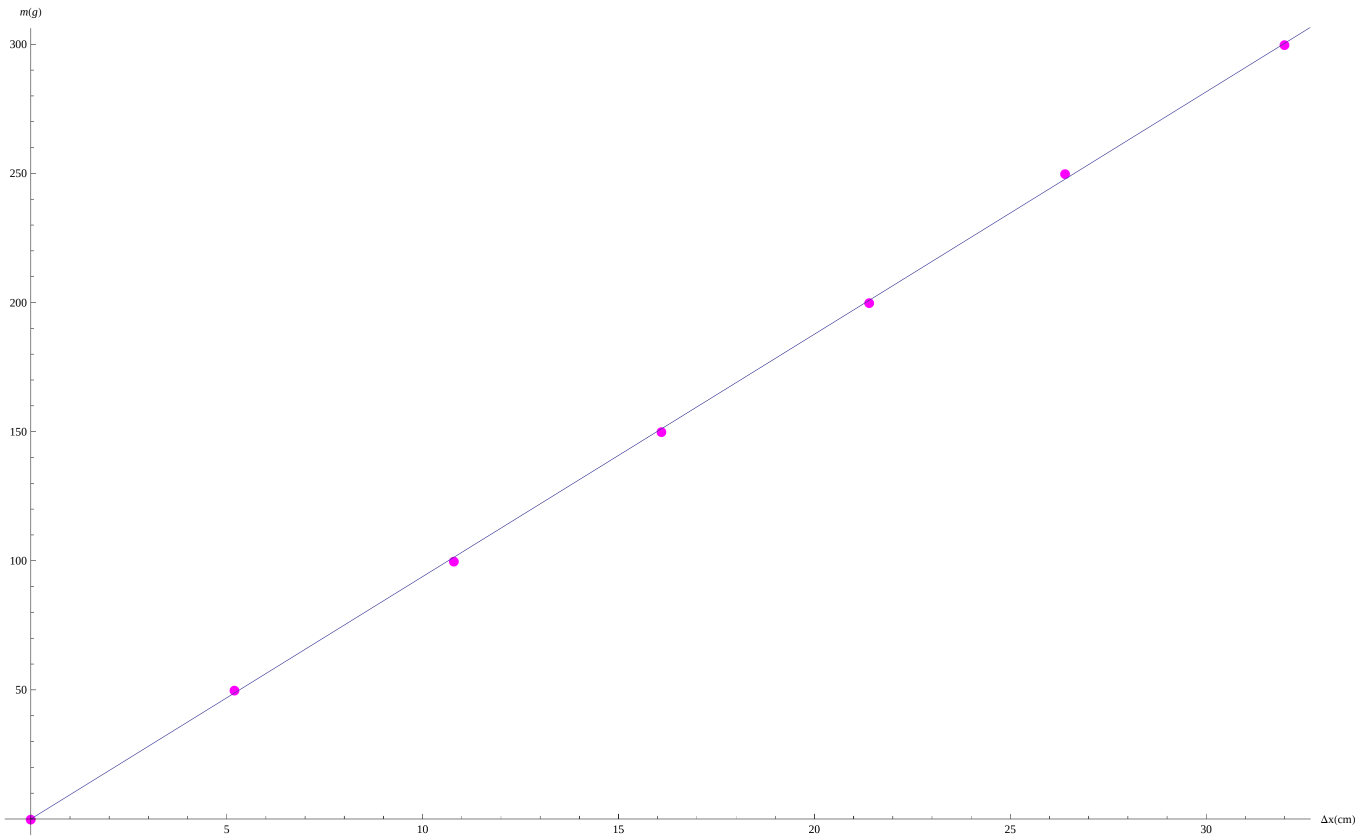
Illesszünk a megadott pontokra Mathematica segítségével egy egyenest Ax alakban (mivel áthalad az origón). Az illesztett görbe meredeksége a D direkciós erőt fogja adni (görbe illesztéséhez a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk). Az illesztett görbe meredeksége $D_{i1} = 30.247\frac{N}{m}$.



Mérések a második rugóra

m	Δx	D
$0g$	$0cm$	$\emptyset$
$50g$	$5.1cm$	$9.433\frac{N}{m}$
$100g$	$10.8cm$	$9.083\frac{N}{m}$
$150g$	$16.1cm$	$9.140\frac{N}{m}$
$200g$	$21.4cm$	$9.168\frac{N}{m}$
$250g$	$26.4cm$	$9.290\frac{N}{m}$
$300g$	$32.0cm$	$9.197\frac{N}{m}$

Az átlag direkciós állandó pedig $\overline{D_{sz2}} = 9.219\frac{N}{m}$. Az illesztett görbe meredeksége $D_{i2} = 9.387\frac{N}{m}$.



Határozzuk meg a rezgőmozgásos mérésből is a direkciós állandókat:
Ehhez az alábbi ismert összefüggéseket kell felhasználnunk:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{D}},$$

ahol

$$\mu = m + m_{eff} \approx m + \frac{m_{rugo}}{3},$$

átrendezve:

$$m = \frac{DT^2}{4\pi^2} - m_{eff}.$$

A következő változókat bevezetve:

$$m = \eta,$$

$$\xi = \frac{T^2}{4\pi^2},$$

a végeredmény

$$\eta = D\xi - m_{eff},$$

ahol m_{eff} elhanyagolhatónak tekinthető, egyébként pedig a B értéke megadja, tehát a két rugónk tömege kiszámítható.

Az adatokat kiszámolva és táblázatba foglalva:

Mérések az első rugóra

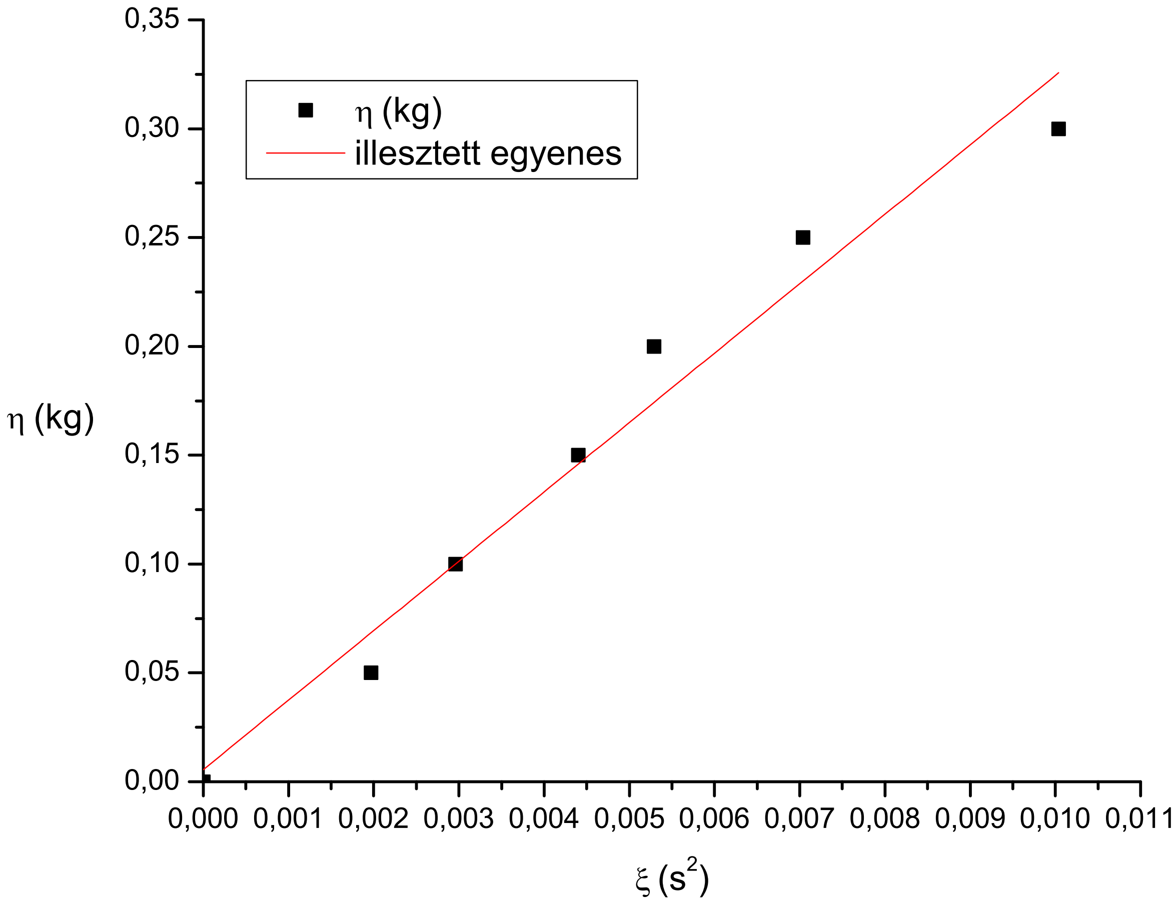
η	$50g$	$100g$	$150g$	$200g$	$250g$	$300g$
T_{11}	$2.84s$	$3.53s$	$4.09s$	$4.56s$	$5.22s$	$6.21s$
T_{12}	$2.72s$	$3.31s$	$4.10s$	$4.59s$	$5.28s$	$6.28s$
T_{13}	$2.81s$	$3.41s$	$4.32s$	$4.56s$	$5.32s$	$6.40s$
T_1	$0.279s$	$0.342s$	$0.417s$	$0.457s$	$0.527s$	$0.630s$
ξ	$1.97 \cdot 10^{-3}s^2$	$2.96 \cdot 10^{-3}s^2$	$4.40 \cdot 10^{-3}s^2$	$5.29 \cdot 10^{-3}s^2$	$7.04 \cdot 10^{-3}s^2$	$10.04 \cdot 10^{-3}s^2$

Ahol T_{11}, T_{12}, T_{13} a mért tíz periódus ideje, T_1 az pedig átlagos periódusidő.

$$T_1 = \frac{\frac{T_{11}}{10} + \frac{T_{12}}{10} + \frac{T_{13}}{10}}{3} = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{30}.$$

A számított η - ξ értékeket ábrázolva és a direkciós állandót illesztéssel (Originnel, $Ax+B$ (m_{eff} miatt) alakú egyenlettel) meghatározva:

$D = 31.882\frac{N}{m}, (B = 0.00562), m_{rugo1} = 1.87g.$

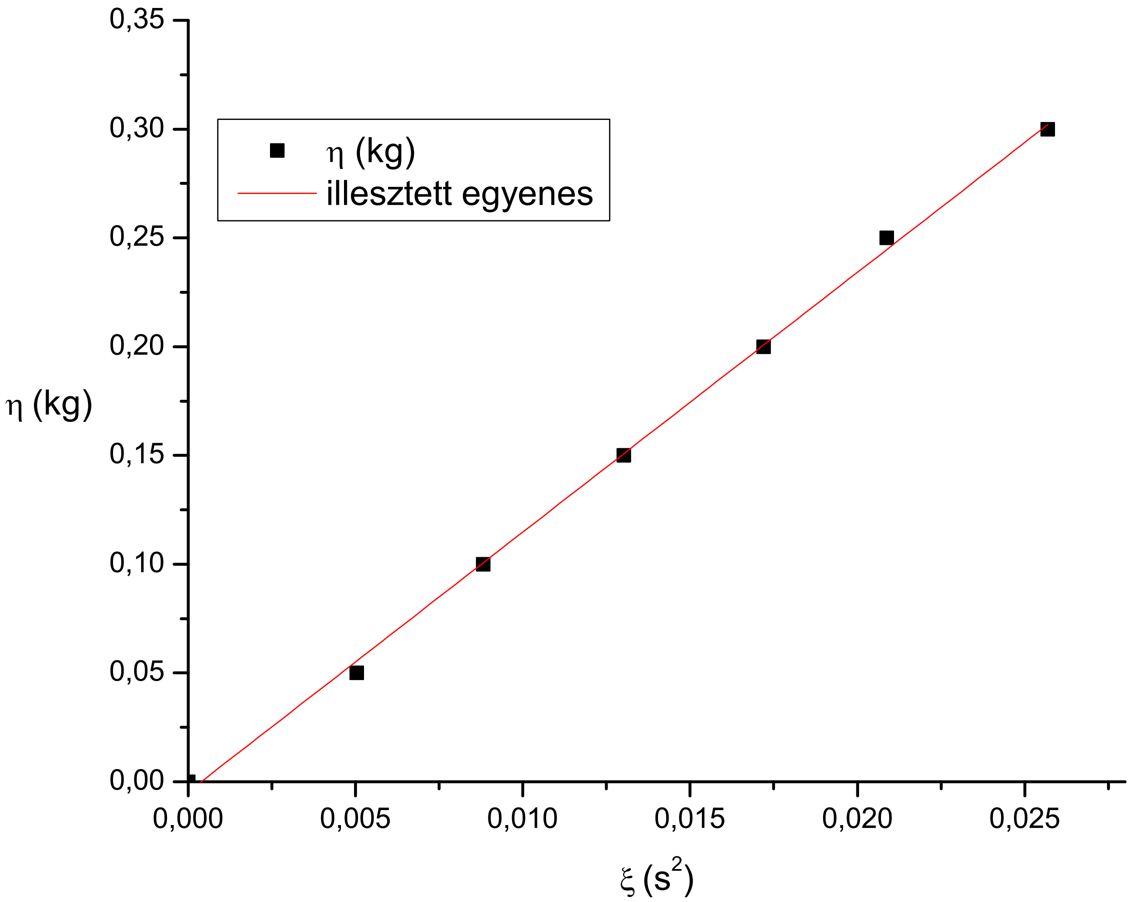


Mérések a második rugóra

η	$50g$	$100g$	$150g$	$200g$	$250g$	$300g$
T_{21}	$4.56s$	$6.00s$	$7.28s$	$8.31s$	$8.96s$	$10.06s$
T_{22}	$4.22s$	$5.84s$	$7.13s$	$8.22s$	$9.16s$	$10.12s$
T_{23}	$4.60s$	$5.87s$	$7.10s$	$8.19s$	$9.13s$	$10.03s$
T_2	$0.446s$	$0.590s$	$0.717s$	$0.824s$	$0.908s$	$1.007s$
ξ	$5.04 \cdot 10^{-3}s^2$	$8.82 \cdot 10^{-3}s^2$	$13.02 \cdot 10^{-3}s^2$	$17.20 \cdot 10^{-3}s^2$	$20.88 \cdot 10^{-3}s^2$	$25.69 \cdot 10^{-3}s^2$

Tehát:

$D = 11.938\frac{N}{m}, (B = -0.00459), m_{rugo2} = 1.53g.$



Hibaszámítás és diszkusszió

A mérés során pontatlanságot okozhatott a vonalzó hibája, a leolvasás hibája, illetve a stopperes mérésnél az emberi reakció.

Bővebb értékelés érdekében számoljuk ki D bizonytalanságát grafikusan, téglalapmódszerrel. Ehhez először mind a négy esetben ki kell számolnunk a relatív hibákat, azaz a mért és illesztett értékek eltérését.

Az első statikus mérés:

Hibakiértékelés az első rugóra, $A = 30.247$, $B = 0$

x	m	m_{i1}	$m - m_{i1} = \Delta m$
$0cm$	$0g$	$0g$	$0g$
$1.7cm$	$50g$	$52.42g$	$-2.42g$
$3.2cm$	$100g$	$98.67g$	$1.33g$
$4.8cm$	$150g$	$148.00g$	$2.00g$
$6.6cm$	$200g$	$203.50g$	$-3.50g$
$8.3cm$	$250g$	$255.91g$	$-5.91g$
$10.0cm$	$300g$	$308.33g$	$-8.33g$

Innen kiszámolható és a grafikus ábrázolásról leolvasható:

$$\tan \alpha_{11} = \frac{2\Delta \left| m_{max} \right|}{x_{max}} = \frac{2 \cdot 8.33 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-2}} = 0.167.$$

Tehát:

$$D_{11} = 30.247 \pm 0.167 \frac{N}{m},$$
$$\frac{\Delta D_{11}}{D_{11}} \approx 0.55\%.$$

A második statikus mérés:

Hibakiértékelés az első rugóra, $A = 9.387$, $B = 0$

x	m	m_{i2}	$m - m_{i2} = \Delta m$
$0cm$	$0g$	$0g$	$0g$
$5.2cm$	$50g$	$49.76g$	$0.24g$
$10.8cm$	$100g$	$103.34g$	$-3.34g$
$16.1cm$	$150g$	$154.06g$	$-4.06g$
$21.4cm$	$200g$	$204.77g$	$-4.77g$
$26.4cm$	$250g$	$252.62g$	$-2.62g$
$32.0cm$	$300g$	$306.20g$	$-6.20g$

$$\tan \alpha_{21} = \frac{2\Delta \left| m_{max} \right|}{x_{max}} = \frac{2 \cdot 6.20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-2}} = 0.039.$$

Tehát:

$$D_{21} = 9.387 \pm 0.039 \frac{N}{m},$$
$$\frac{\Delta D_{21}}{D_{21}} \approx 0.42\%.$$

Majd hsaonlóan eljárva a dinamikai mérésekkel:

Hibakiértékelés az első rugóra, $A = 31.882$, $B = 0.00562$

ξ	μ	μ_{i1}	$\mu - \mu_{i1} = \Delta\mu$
$0s^2$	$0g$	$0g$	$0g$
$1.97 \cdot 10^{-3}s^2$	$50g$	$57.19g$	$-7.19g$
$2.96 \cdot 10^{-3}s^2$	$100g$	$92.75g$	$7.25g$
$4.40 \cdot 10^{-3}s^2$	$150g$	$144.66g$	$5.34g$
$5.29 \cdot 10^{-3}s^2$	$200g$	$187.04g$	$12.96g$
$7.04 \cdot 10^{-3}s^2$	$250g$	$236.83g$	$13.17g$
$10.04 \cdot 10^{-3}s^2$	$300g$	$312.48g$	$-12.48g$

$$\tan \alpha_{12} = \frac{2\Delta\left|\mu_{max}\right|}{\xi_{max}} = \frac{2 \cdot 13.17 \cdot 10^{-3}}{10.04 \cdot 10^{-3}} = 1.312.$$

Tehát:

$$D_{12} = 31.882 \pm 1.312 \frac{N}{m},$$

$$\frac{\Delta D_{12}}{D_{12}} \approx 4.25\%.$$

Hibakiértékelés a második rugóra, $A = 11.938$, $B = -0.00459$

ξ	μ	μ_{i2}	$\mu - \mu_{i2} = \Delta\mu$
$0s^2$	$0g$	$0g$	$0g$
$5.04 \cdot 10^{-3} s^2$	$50g$	$60.16g$	$-10.16g$
$8.82 \cdot 10^{-3} s^2$	$100g$	$105.29g$	$-5.29g$
$13.02 \cdot 10^{-3} s^2$	$150g$	$155.43g$	$-5.43g$
$17.20 \cdot 10^{-3} s^2$	$200g$	$205.33g$	$-5.33g$
$20.88 \cdot 10^{-3} s^2$	$250g$	$249.26g$	$0.74g$
$25.69 \cdot 10^{-3} s^2$	$300g$	$306.68g$	$-6.68g$

$$\tan \alpha_{22} = \frac{2\Delta\left|\mu_{max}\right|}{\xi_{max}} = \frac{2 \cdot 10.16 \cdot 10^{-3}}{25.69 \cdot 10^{-3}} = 0.791.$$

Tehát:

$$D_{22} = 11.938 \pm 0.791 \frac{N}{m},$$

$$\frac{\Delta D_{22}}{D_{22}} \approx 6.63\%.$$

Látható, hogy a statikus mérés sokkal pontosabb, ami annak köszönhető, hogy ott jóval kevesebb szubjektív hibát követ el az ember, ezen kívül nem a dinamikai mérésnél számít még, hogy csillapított harmonikus rezgőmozgást fog végezni a test, ezen kívül nem tudjuk úgy meghúzni, hogy tartósabb ideig megtartja az egyenesét. Az időmérés pontosságát javítja, hogy 10 periódust mérünk, viszont a többi jelenség egyre jobban befolyásolja az így mért eredményeket. Ezen kívül előfordulhat, hogy a rugót túlzottan megnyújtottuk. Statikus mérés esetén a leolvasás hibájáról beszélhetünk. A leolvasás közben a legtöbb esetben a test forgómozgást végzett, ami megnehezítette a dolgunkat. Ezen kívül a fémvonalzóval is nagyon nehezen lehetett leolvasni a dolgokat.