

# 1. házi feladat, szeptember 13./15.

**1. feladat (2+1 pont).** a.) Lássuk be, hogy a 2D forgásmátrixok kommutatív csoportot alkotnak! (Létezik egység, forgatások egymásutánja /mindkét sorrendben/ megfelelő szögű forgatás, visszaforgatáshoz tartozó mátrix épp az inverz.)

$$R(0) = I$$

$$R(\vartheta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\vartheta) = R(\vartheta + \varphi)$$

$$R(-\varphi) = R^{-1}(\varphi)$$

b.) Mutassuk meg, hogy a forgásmátrixok determinánsa egységnyi, és ortogonálisak:

$$\det R(\varphi) = 1$$

$$R^T(\varphi) = R^{-1}(\varphi)$$

(Megj.: Ez az ún. SO(2), 2D speciális ortogonális mátrixok csoportja)

**2. feladat (5 pont).** Határozzuk meg a következő függvények nulla körüli Taylor-sorát!

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(1-x)^n}$$

**3. feladat (2+2 pont).** Az ismert módszerek segítségével (parcint., helyettesítés) számold ki a következő integrálok értékét!

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 \sin x dx, \quad \int_0^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx$$

**4. feladat (2+1).** Adott a következő vektormező:  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(\frac{y}{r^2}, \frac{-x}{r^2}, 0\right)$  ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ). a.) Számold ki a divergenciáját és a rotációját! b.) Előállítható-e  $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$  alakban? (Potenciálos?)

**5. feladat (5+5(bónusz) pont).** A szabadesés mozgásegyenlete közegellenállással a következő alakú ( $z$ -tengely lefelé irányítva):  $m\ddot{z} = g - k\dot{z}$ , ahol  $m$  a test tömege,  $k$  a közeg és a test alakját jellemző állandó,  $g$  pedig a nehézségi gyorsulás. Írj programot mely az Euler-módszer segítségével meghatározza a sebesség időfüggését! (Használj  $v_z = \dot{z}$  helyettesítést, kezdőfeltételnek pedig  $v_z(t_0 = 0) = 0 - t!$ ). Vizsgáld különböző  $m$  és  $k$  értékek mellett, hogy milyen állandó sebességre áll be a mozgás! BÓNUSZ: A helyettesítés után az egyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenletté válik. Határozd meg a  $v_z(t)$  sebesség-idő függvényt, majd vizsgáld a  $t \rightarrow \infty$  határesetet, vesd össze a numerikus eredménnyel!