HF II/1) Mátrixfüggvények

Legyen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a $\sin(c\mathbf{A})$ függvényt: a) A Taylor-sor direkt felösszegzésével b) Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálásával

HF II/2) Lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása

Egy C torziós merevségű tengelyre egymástól L távolságra lévő három egyenlő, θ tehetetlenségi nyomatékú tárcsa van szerelve. A rendszer tengelyvégek szabadok (súrlódásmentesen csapágyazottak). Legyen $\kappa = \frac{C}{L\theta}$. Ha az i. tárcsa elfordulási szöge ϕ_i, akkor a rendszer torziós lengéseinek egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 &= \kappa(\phi_2 - \phi_1) \\ \ddot{\phi}_2 &= \kappa(\phi_1 - \phi_2) + \kappa(\phi_3 - \phi_2) \\ \ddot{\phi}_3 &= \kappa(\phi_2 - \phi_3). \end{aligned}$$

Ezt $\ddot{\vec{\phi}} = \kappa\mathbf{A}\vec{\phi}$ alakba írva oldjuk meg a mozgásegyenleteket az órán tanult, mátrixfüggvényeket alkalmazó módszerrel.

HF II/3) Indexes deriválás

Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat:

$$div rot \vec{v} = 0$$

$$div(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v}\mathrm{rot}\vec{u} - \vec{u}\mathrm{rot}\vec{v}$$

$$rot(\phi\vec{u}) = \phi\mathrm{rot}\vec{u} + \mathrm{grad}\phi \times \vec{u}$$

HF II/4) Vonalintegrál

Mennyi munkát végzünk az $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$ gravitációs erőtérben, ha egy m tömegű testet egy egyenes mentén az $\vec{r_1} = (a, 0, 0)$ pontból az $\vec{r_2} = (0, a, 0)$ pontba mozdítjuk el?