1. ZH, Elméleti Mechanika, 2011 november 10.

1. feladat (12 pont). Tekintsük a következő potenciált:

$$V(x) = V_0 \left[(\alpha x)^5 - 5 (\alpha x)^3 + 4 (\alpha x) \right]$$

a) (2 pont) Vázoljuk fel a V(x) függvényt! b) (3 pont) Keressük meg a V(x) potenciálban történő egydimenziós mozgás stabil és instabil egyensúlyi helyeit! c) (4 pont) Vázoljuk fel a fázistérképet! d) (3 pont) Határozzuk meg a stabil fixpontok körüli kis rezgések periódusidejét!

2. feladat (4 pont). a) Tekintsük a következő potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > x_1 \\ -V_0 & \text{ha } 0 < x < x_0 \\ -V_1 & \text{ha } x_0 < x < x_1, \end{cases}$$

ahol $V_1 > V_0 > 0$. a) (1 pont) Vázoljuk a potenciált! b) (1 pont) A potenciálban kialakuló egy dimenziós mozgás mely energiaértékek esetén lesz korlátos (”kötött”)? Mely energiaértékek esetén mely intervallumokra korlátozódik a mozgás? c) (2 pont) Határozzuk meg a mozgás periódusidejét a lehetséges korlátos mozgásokra!

3. feladat (14 pont). $V = mgy$ nehézségi erőtérben mozogjon egy pontszerű test $y = f(x)$ kényszerpályán. a) (3 pont) Tekintsük az x-et általános koordinátának. Mi ekkor a rendszer Lagrange-függvénye? b) (2 pont) A Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől. Írjuk fel a Beltrami-függvényt! Milyen fizikai mennyiségnek felel ez meg? c) (4 pont) A b) feladat eredményét felhasználva fejezzük ki $\dot{x}$ -ot és írjuk fel a differenciálegyenlet formális megoldását! d) (1 pont) Tételezzük fel, hogy $f(x)$ alakja olyan, hogy benne periodikus mozgás megvalósulhat. Mely egyeneletek adják meg a fordulópontok koordinátáit? e) (1 pont) A c) feladat eredményét használva fejezzük ki a periódusidőt, mint egy függvény x szerinti integrálját a két fordulópont között. f) (3 pont) Az e) feladat eredményét felhasználva számoljuk ki a periódusidőt $f(x) = \alpha |x|$ kényszer esetén ($\alpha > 0$).

4. feladat (8 pont). Tekintsünk egy k rugóállandójú rugót, mely egyik végén csuklóval rögzített, másik végén pedig egy m tömegű test nehézségi erőtérben mozoghat függőleges síkban (síkinga rugós felfüggesztéssel). a) (3 pont) Írjuk fel a Lagrange-függvényt kényelmes általános koordináták megválasztásával! b) (2 pont) Határozzuk meg a megmaradó mennyiségeket (energia és kanonikus impulzus), ha vannak! c) (3 pont) Írjuk fel az Euler–Lagrange egyenleteket!

5. feladat (11 pont). Tekintsük a következő rendszert: Egy m tömegű testtel végződő inga felfüggesztési pontja egy kör alakú sínen súrlódásmentesen mozoghat. A felfüggesztésn és az inga tömege zérus. (Ez nem más, mint a kettős inga abban a határesetben, amikor a középső tömeg nulla.) a) (4 pont) Mi a Lagrange-függvény kényelmes koordinátázással? b) (3 pont) Határozzuk meg a ciklikus koordinátákat, és a hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségeket, illetve a megmaradó energiát! c) (4 pont) Írjuk fel az Euler–Lagrange-egyenleteket!

6. feladat (7 pont). Emlékeztető az előadásról: Mozogjon egy test egy dimenzióban a $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \epsilon v(x)$ potenciálban, ahol ϵ kis paraméter. A perturbációszámítás vezető rendjében a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\epsilon}{\omega E}\int_0^{\pi/2} du \frac{v_s(A_0 \sin u) - v_s(A_0)}{\cos^2 u} + O(\epsilon^2),$$

ahol $A_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ és v_s a perturbáló potenciál szimmetrizáltját jelenti.

Legyen a perturbáló potenciál:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| > x_0 \\ v_0 & \text{ha } |x| < x_0 \end{cases}$$

Számoljuk ki a periódusidő $O(\epsilon)$ rendű korrekcióját! Értelmezzük kvalitatíven a potenciál hatását $v_0 > 0$ és $v_0 < 0$ esetben.