

A csoport: Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$x(1 + 4x^2)y'' + (4x^2 - 1)y' + 64x^3 = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!

Keresse meg az $y(0) = y(1/2) = 0$ peremfeltételek esetében a Green-függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:

Az egyenletet $x(1 + 4x^2)$ -tel osztva:

$$y'' + \frac{4x^2 - 1}{x(1 + 4x^2)}y' = -\frac{64x^2}{1 + 4x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{4x^2 - 1}{x(1 + 4x^2)} dx\right) = \frac{x}{1 + 4x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

y_1 -et behelyettesítve y_2 -re:

$$y_2' = \frac{x}{1 + 4x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(0) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln(1 + 4x^2)$$

$$Y_2(x) = \ln(1 + 4x^2) - \ln 2$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{8x \ln 2}{1 + 4x^2}$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1+4\xi^2}{8\xi \ln 2} [\ln(1 + 4x^2) - \ln 2] \ln(1 + 4\xi^2), & \text{ha } 0 < \xi < x \\ \frac{1+4\xi^2}{8\xi \ln 2} [\ln(1 + 4\xi^2) - \ln 2] \ln(1 + 4x^2), & \text{ha } x < \xi < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$y(x) = \int_0^{1/2} G(x, \xi) \left(-\frac{64\xi^2}{1 + 4\xi^2}\right) d\xi = -\frac{8}{\ln 2} [\ln(1 + 4x^2) - \ln 2] \int_0^x \ln(1 + 4\xi^2) \xi d\xi \quad (1)$$

$$- \frac{8}{\ln 2} \ln(1 + 4x^2) \int_x^{1/2} [\ln(1 + 4\xi^2) - \ln 2] \xi d\xi \quad (2)$$

$$= \frac{\ln(1 + 4x^2)}{\ln 2} - 4x^2 \quad (3)$$

B csoport: Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$(4 + x^2)y'' + \left(x - \frac{4}{x}\right)y' - x^2 = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!

Keresse meg az $y(1/2) = y(1) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:

Az egyenletet $(4 + x^2)$ -tel osztva:

$$y'' + \frac{x^2 - 4}{x(4 + x^2)}y' = \frac{x^2}{4 + x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{x^2 - 4}{x(4 + x^2)} dx\right) = \frac{x}{4 + x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

y_1 -et behelyettesítve y_2 -re:

$$y_2' = \frac{x}{4 + x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{2} \ln(4 + x^2)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln(4 + x^2) - \ln\left(\frac{17}{4}\right)$$

$$Y_2(x) = \ln(4 + x^2) - \ln 5$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{2x}{4 + x^2} \ln\left(\frac{20}{17}\right)$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{4 + \xi^2}{2\xi \ln(20/17)} [\ln(4 + x^2) - \ln 5] [\ln(4 + \xi^2) - \ln(\frac{17}{4})], & \text{ha } \frac{1}{2} < \xi < x \\ \frac{4 + \xi^2}{2\xi \ln(20/17)} [\ln(4 + \xi^2) - \ln 5] [\ln(4 + x^2) - \ln(\frac{17}{4})], & \text{ha } x < \xi < 1 \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$y(x) = \int_{1/2}^1 G(x, \xi) \frac{\xi^2}{4 + \xi^2} d\xi \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2 \ln(20/17)} [\ln(4 + x^2) - \ln 5] \int_{1/2}^x \left[\ln(4 + \xi^2) - \ln\left(\frac{17}{4}\right) \right] \xi d\xi \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2 \ln(20/17)} \left[\ln(4 + x^2) - \ln\left(\frac{17}{4}\right) \right] \int_x^1 [\ln(4 + \xi^2) - \ln 5] \xi d\xi \quad (6)$$

$$= -\frac{3 \ln(4 + x^2)}{16 \ln(20/17)} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{3 \ln 5}{16 \ln(20/17)} - \frac{1}{4} \quad (7)$$

C csoport: Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$xy'' + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}y' + \frac{4x^3}{x^2 + 1} = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!

Keresse meg az $y(1/4) = y(1/2) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:

Az egyenletet x -szel osztva:

$$y'' + \frac{x^2 - 1}{x(1 + x^2)}y' = -\frac{4x^2}{1 + x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{x^2 - 1}{x(1 + x^2)} dx\right) = \frac{x}{1 + x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

y_1 -et behelyettesítve y_2 -re:

$$y_2' = \frac{x}{1 + x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(1/4) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(1/2) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln(1 + x^2) - \ln\left(\frac{17}{16}\right)$$

$$Y_2(x) = \ln(1 + x^2) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{2x}{1 + x^2} \ln\left(\frac{20}{17}\right)$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1 + \xi^2}{2\xi \ln(20/17)} [\ln(1 + x^2) - \ln(\frac{5}{4})] [\ln(1 + \xi^2) - \ln(\frac{17}{16})], & \text{ha } \frac{1}{4} < \xi < x \\ \frac{1 + \xi^2}{2\xi \ln(20/17)} [\ln(1 + \xi^2) - \ln(\frac{5}{4})] [\ln(1 + x^2) - \ln(\frac{17}{16})], & \text{ha } x < \xi < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$y(x) = \int_{1/4}^{1/2} G(x, \xi) \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} d\xi \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2 \ln(20/17)} \left[\ln(1 + x^2) - \ln\left(\frac{5}{4}\right) \right] \int_{1/4}^x \left[\ln(1 + \xi^2) - \ln\left(\frac{17}{16}\right) \right] \xi d\xi \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{2 \ln(20/17)} \left[\ln(1 + x^2) - \ln\left(\frac{17}{16}\right) \right] \int_x^{1/2} \left[\ln(1 + \xi^2) - \ln\left(\frac{5}{4}\right) \right] \xi d\xi \quad (10)$$

$$= \frac{3 \ln(1 + x^2)}{16 \ln(20/17)} - x^2 - \frac{3 \ln(17/16)}{16 \ln(20/17)} + \frac{1}{16} \quad (11)$$

D csoport: Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$x \frac{4 + 9x^2}{4 - 9x^2} y'' - y' - \frac{81x^3}{4 - 9x^2} = 0$$

a homogén egyenlet

$$y_1 = 1$$

partikuláris megoldásának ismeretében!

Keresse meg az $y(0) = y(2/3) = 0$ peremfeltételek esetében a Green függvényt és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását!

Megoldás:

Az egyenletet $x(4 + 9x^2)/(4 - 9x^2)$ -tel osztva:

$$y'' + \frac{9x^2 - 4}{x(4 + 9x^2)} y' = \frac{81x^2}{4 + 9x^2}$$

A Wronsky-determináns

$$W = \exp\left(-\int \frac{9x^2 - 4}{x(4 + 9x^2)} dx\right) = \frac{x}{4 + 9x^2}$$

(x^2 helyett új változót vezetünk be, aztán a keletkezett törtet parciális törtekre bontjuk.) Mivel

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

y_1 -et behelyettesítve y_2 -re:

$$y_2' = \frac{x}{4 + 9x^2}$$

Integrálva (x^2 helyett új változóval):

$$y_2 = \frac{1}{18} \ln(4 + 9x^2)$$

Legyen $Y_1(x)$ az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_1(0) = 0$ határfeltételnek tesz eleget, $Y_2(x)$ pedig az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ olyan lineárkombinációja, ami az $Y_2(2/3) = 0$ határfeltételnek tesz eleget (tetszőleges szorzófaktor erejéig határozottak):

$$Y_1(x) = \ln(4 + 9x^2) - 2 \ln 2$$

$$Y_2(x) = \ln(4 + 9x^2) - 3 \ln 2$$

A Wronsky-determináns (a fentitől egy szorzófaktorban tér el):

$$W = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \frac{18x \ln 2}{4 + 9x^2}$$

Ezzel a Green-függvény:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{4+9\xi^2}{18\xi \ln 2} [\ln(4 + 9x^2) - 3 \ln 2] [\ln(4 + 9\xi^2) - 2 \ln 2], & \text{ha } 0 < \xi < x \\ \frac{4+9\xi^2}{18\xi \ln 2} [\ln(4 + 9\xi^2) - 3 \ln 2] [\ln(4 + 9x^2) - 2 \ln 2], & \text{ha } x < \xi < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$y(x) = \int_0^{2/3} G(x, \xi) \left(-\frac{81\xi^2}{4 + 9\xi^2}\right) d\xi \quad (12)$$

$$= -\frac{9}{2 \ln 2} [\ln(1 + 4x^2) - 3 \ln 2] \int_0^x [\ln(4 + 9\xi^2) - 2 \ln 2] \xi d\xi \quad (13)$$

$$- \frac{9}{2 \ln 2} [\ln(4 + 9x^2) - 2 \ln 2] \int_x^{2/3} [\ln(4 + 9\xi^2) - 3 \ln 2] \xi d\xi \quad (14)$$

$$= -\frac{\ln(4 + 9x^2)}{\ln 2} + \frac{9}{4} x^2 + 2 \quad (15)$$