Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 10. feladatsor

1. Legyen T az origó középpontú egységkörnek az $x, y \geq 0$ síkrészbe eső negyede. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T y^2\sqrt{1-x^2}$ integrált!

2. Legyen T a $(0,0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $(0,1)$ pontok által meghatározott origó középpontú körcikk. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T x^3 y$ integrált!

3. Legyen T az origó középpontú egységkörlap az $x, y \geq 0$ síkrészbe eső negyede. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T \sqrt{1+x^2+y^2}$ integrált!

4. Legyen T az origó középpontú egységkörlap $-30°$ és $60°$ közti szögtartományba eső negyede. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T \frac{1}{1+x^2+y^2}$ integrált!

5. Legyen H az origó középpontú egységgömbnek az $x, y, z \geq 0$ térrészbe eső nyolcada. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_H z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ integrált!

6. Legyen H az $x = y = 0$ egyenes körüli 1 sugarú henger $x, y, z \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$ térrészbe eső része. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_H \frac{z}{x^2+y^2+1}$ integrált!

7. Legyen $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét!
$$\int_H \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Emlékeztető.

Integráltranszformáció. Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x, y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor
$$\int_Q f = \int_T f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)\,\big|\det\big(g'(u,v)\big)\big|\; du\, dv,$$
ahol tehát a g leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha például egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\big\}$, $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és $g(r, \varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$. Ekkor
$$\det(g'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$
és így
$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, dr\, d\varphi.$$