Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 2. feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e)}\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{f)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{g)}\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{h)}\ \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x\ a \in (0,+\infty)$$

2. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{a)}\ \int_0^{1} \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int_0^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)}\ \int_0^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

3. Milyen valós α-ra lesznek konvergensek az alábbi impropius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$\text{a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

4. Kovergensek-e az alábbi imroprius integrálok?

$$\text{a)}\ \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d)}\ \int_1^{+\infty} e^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e)}\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \qquad \text{f)}\ \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{g)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{h)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{i)}\ \int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{j)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{k)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

5. Igazoljuk a nevezetes $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ összefüggést az alábbi azonosság felhasználásával $\varepsilon \to 0+$ esetén!

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y = \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x$$

6. Tegyük fel, hogy $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens. Következik-e ebből, hogy

   a) $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?

   b) $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ is konvergens?

   c) $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens?

   d) $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens, ha még azt is feltesszük, hogy $f \geq 0$?

   *e) $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ is konvergens?

*7. Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x$ integrált!