Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/1 (emelt szint), 3. feladatsor

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk is meg az összegüket.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q|<1)$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2. Állapítsuk meg az összehasonlító kritériumok alapján, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3. Állapítsuk meg gyök- vagy hányadoskritériummal, hogy konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1000+k}{2k+1}$.

4. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}$.

5. Mutassunk példát olyan (a_n) sorozatra, hogy $\sum a_n$ konvergens, de $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

6. Ismert, hogy $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \log 2$. Határozzuk meg ekkor az $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\dots$ sor összegét!

*7. Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n\in K} \frac{1}{n}$ sor, ahol $K = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n\text{-ben nem szerepel a 9-es számjegy}\}$.

*8. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ sor?

Emlékeztető.

Sor konvergenciája. A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az $s_n = a_1 + \dots + a_n$ sorozatnak létezik határértéke és az véges. Ekkor a sor összege $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n$

Kritériumok.

a) **Triviális**: ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim a_n = 0$,

b) **Összehasonlító**:

(i) ha $0 \le a_n \le b_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens,

(ii) ha $a_n > 0, b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.

c) **Kondenzációs**: $a_n \ge 0$ és monoton csökkenő, ekkor $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergens.

d) **Hányados**: $a_n > 0$, ha $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens, ha $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens, egyébként pedig további vizsgálat szükséges.

e) **Gyök**: $a_n \ge 0$, ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens, ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens, ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor további vizsgálat szükséges.

f) **Leibniz**: a_n monoton csökkenő nullsorozat, ekkor a $\sum (-1)^n a_n$ alternáló sor konvergens.