Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 4. feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát! Vizsgáljuk meg a konvergenciát a konvergenciahalmaz végpontjaiban!

$$\text{a)}\ \sum x^n \qquad \text{b)}\ \sum n x^n \qquad \text{c)}\ \sum \frac{1}{n} x^n \qquad \text{d)}\ \sum \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{e)}\ \sum n! x^n$$

$$\text{f)}\ \sum \frac{2^n}{n^2} x^n \qquad \text{g)}\ \sum \frac{2^n}{n!} x^n \qquad \text{h)}\ \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n \qquad \text{i)}\ \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n^2} \qquad \text{j)}\ \sum x^{n^2}$$

2. Mutassunk példát olyan hatványsorra, amelynek konvergenciahalmaza

$$\text{a)}\ \{0\} \qquad \text{b)}\ \mathbb{R} \qquad \text{c)}\ [-17,17] \qquad \text{d)}\ (-17,17) \qquad \text{e)}\ [-17,17) \qquad \text{f)}\ (-17,17].$$

3. Állítsuk elő az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

$$\text{a)}\ H=(-1,1),\quad f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{b)}\ H=(-1,1),\quad f(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\text{c)}\ H=(-1,1),\quad f(x)=\ln(1+x), \qquad \text{d)}\ H=(-1,1),\quad f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,$$

$$\text{e)}\ H=(-1,1),\quad f(x)=\arcsin x, \qquad \text{f)}\ H=\mathbb{R},\quad f(x)=\operatorname{ar\,sh} x.$$

4. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával írjuk fel az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a sorok konvergenciahalmaza?

$$\text{a)}\ \sin x^2 \qquad \text{b)}\ \frac{1}{1-4x^2} \qquad \text{c)}\ e^{-x} \qquad \text{d)}\ xe^{-x} \qquad \text{e)}\ \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \text{f)}\ x^{10}e^{-x^2}$$

5. Mi az alábbi numerikus sorok összege? (Használjuk fel az előző feladatok eredményeit!)

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^n(2n+1)!} \qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

6. Számítsuk ki a következő deriváltakat az adott pontokban!

$$\text{a)}\ \left(xe^{x^3}\right)^{(60)}(0) = ? \qquad \text{b)}\ \left(\cos x^3\right)^{(60)}(0) = ?$$

$$\text{c)}\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad f^{(5)}(0) = ? \qquad \text{d)}\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad f^{(4)}(0) = ?$$

7. Írjuk fel az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ függvény egy primitív függvényét 0 közepű hatványsor alakban!

*8. Igaz-e, hogy ha egy hatványsor egyenletesen és abszolút konvergens, akkor egyenletesen abszolút konvergens?

*9. Adjunk példát olyan végtelen sokszor differenciálható függvényre, amelynek 0 közepű Taylor sora csak az $x = 0$ pontban konvergens!

Emlékeztető.

Cauchy-Hadamard-tétel. Egy 0 középpontú $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy olyan 0 középpontú intervallum, amelynek R sugarát az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ ha a nevező véges és nem nulla,}$$

illetve definíció szerint legyen $R := 0$, ha a nevező végtelen és $R := +\infty$, ha a nevező nulla. A konvergencia-intervallum végpontjairól azonban a tétel semmit sem mond, így ott egy hatványsor lehet konvergens, illetve divergens is.