Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 5. feladatsor

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!

   a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

   c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

   d) $f(x) = (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

2. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. Hogyan lehet egy $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ függvényt előállítani tisztán szinuszos (koszinuszos) sor összegeként?

*4. Állítsuk elő a sin függvényt a $(0, \pi)$ intervallumon tisztán koszinuszos sor összegeként!

*5. Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ összeget Fourier-sor segítségével!

Emlékeztető.

Fourier-sorok. Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0, 2\pi]$ intervallumot is, ekkor az alábbi definíciók értelemszerűen módosulnának). Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.