Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 6. feladatsor

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális derivált-függvényét!

$$\text{a)}\quad f(x,y)=x^2 \qquad \text{b)}\quad f(x,y)=y^3 \qquad \text{c)}\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$\text{d)}\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad \text{e)}\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{f)}\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f,\ \partial_2 f,\ \partial_3 f,\ \partial_1^2 f,\ \partial_2^2 f,\ \partial_1\partial_3 f,\ \partial_1\partial_2\partial_3 f,\ \partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:

$$\text{a)}\quad f(x,y,z)=5z, \qquad \text{b)}\quad f(x,y,z)=x+y+z, \qquad \text{c)}\quad f(x,y,z)=ze^{x-y}.$$

3. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő függvények Jacobi-mátrixát egy $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ pontban! Mi lesz $f'(1,2,3)$?

4. Mi lesz az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0,y_0) pontban, ha $f(x,y)=$

$$\text{a)}\quad xy \qquad \text{b)}\quad x^4+x^2y^2+y^4 \qquad \text{c)}\quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

5. Mi lesz a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0,y_0) pontban, ha $g(x,y)=$

$$\text{a)}\quad (x,\ y) \qquad \text{b)}\quad \left(x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4+x^2y^2+y^4\right) \qquad \text{c)}\quad (e^x\cos y,\ e^x\sin y)$$

6. Számítsuk ki $f''(3,4)$-et, továbbá Írjuk fel az érintősík egyenletét ebben a pontban, ahol

$$\text{a)}\quad f(x,y)=xy \qquad \text{b)}\quad f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4 \qquad \text{c)}\quad f(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

7. Mutassuk meg, hogy $\Delta u(x,y):=\partial_1^2u(x,y)+\partial_2^2u(x,y)=0$ teljesül, ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve ha $u(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$!

*8. Legyen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Igazoljuk, hogy $\partial_{12}f(0,0)\neq\partial_{21}f(0,0)$.

*9. Legyen $f\colon\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|^{2-n}$ $(n\geq 2)$. Mutassuk meg, hogy

$$\Delta f:=\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2 f=0.$$