Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 7. feladatsor

1. Keressük meg az alábbi függvények lokális minimum- és maximumhelyeit, illetve nyeregpontjait!
   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   b) $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2+1)\left(y + \dfrac{1}{y}\right)$
   c) $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0 \text{ vagy } y=0\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$
   d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$
   e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$
   f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott halmazokon.
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad K = [0,1] \times [0,1]$
   b) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad K = [-1,2] \times [-1,2]$
   c) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad K = [-2,2] \times [-2,2]$

3. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ függvényt. Mutassuk meg, hogy f bármely origón átmenő egyenesre vett leszűkítésének lokális minimumhelye van az origóban, azonban f-nek nincs szélsőértéke az origóban.

4. Az $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ ellipszoidba írható, koordináta tengelyekkel párhuzamos élű téglatestek közül melyik térfogata a legnagyobb, illetve legkisebb?

*5. Az $x + y - z - 1 = 0$ és $x - 2y + 3z - 6 = 0$ egyenletű síkok metszésvonala milyen távol van az origótól?

*6. Adott egy négyszög négy oldalának hossza. Mikor maximális a területe?

7. Van-e (alkalmas tartományon) primitív függvényük az alábbi függvényeknek? Ha nincs, bizonyítsuk be, ha van, adjunk meg egyet!

a) $f(x,y) = (x,y)$	b) $f(x,y) = (-y,x)$
c) $f(x,y) = (x^2 + xy^2, x^2y + y^3)$	d) $f(x,y) = (y\cos x, y + \sin x + \cos x)$
e) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$	f) $f(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

Emlékeztető.

Szélsőérték. Ha az $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$, azaz $\partial_j f(a) = 0,\ j = 1,2,\dots,n$. Ha az $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és $\partial_j f(a) = 0,\ j = 1,2,\dots,n$, akkor az $f''(a)$ mátrix pozitív definitsége esetén a-ban szigorú lokális minimum, az $f''(a)$ mátrix negatív definitsége esetén a-ban szigorú lokális maximum van. Ha az $f''(a)$ mátrix indefinit, akkor az a pontban nincs szélsőérték.
Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor

(i) A pozitív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} > 0$,
(ii) A negatív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} < 0$,
(iii) A indefinit, ha $\det A < 0$.

Primitív függvény. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f primitív függvényén egy olyan $F:\Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1,2,\dots,n$-re. Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik.