Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 8. feladatsor

1. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

   a) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $(R>0)$ (körvonal)

   b) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t)$ $(R>0)$ (ciklois)

   c) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos^3 t, R\sin^3 t)$ $(R>0)$ (asztroid)

   d) $\gamma\colon [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, R\cos t, R\sin t)$ $(h, R>0)$ (csavarvonal)

2. Legyen $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

3. Legyen Γ a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

4. Legyen Γ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

5. Legyen Γ a $(2,0)$, $(0,2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0,2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x,y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\int_\Gamma f$ vonalintegrált!

6. Legyen $\gamma\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma(t) = (3\cos t, \sin t)$. Számítsuk ki az $\int_\Gamma f$ vonalintegrált, ha f a következő alakú.

   a) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ b) $f(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

7. Számítsuk ki $\int_\Gamma f$ vonalintegrált, ha Γ és f a következő alakú:

   a) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\log(1+t^2)\sin t, \sqrt{5t^2 + \cos \pi t}\right)$, $f(x,y) = (x+y, x+y)$;

   b) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $f(x,y) = (e^{-x^2} + y, e^{-y^2} + x)$.

*8. Igazoljuk, hogy az $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ függvénynek az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ tartományon létezik primitív függvénye, de az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon nincs primitív függvénye.

Emlékeztető.

Vonalintegrál. Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe. Ekkor a görbe ívhossza:

$$l(\varphi) = \int_a^b |\dot{\varphi}(t)|\, dt.$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a,b]) \subset \Omega$. Ekkor az f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle\, dt$$

valós integrált értjük. Ha f-nek létezik Ω-ban primitív függvénye (azaz egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $F' = f$, azaz $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re), akkor

$$\int_\varphi f = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a) = \varphi(b)$) f vonalintegrálja φ mentén 0.