Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2 (emelt szint), 9. feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

   a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1+y^2}$, ahol $D=[1,2]\times[0,1]$;

   b) $\displaystyle\int_D \sin y$, ahol $D=[0,1]\times[-1,1]$;

   c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x}+y)^2$, ahol $D=[0,1]\times[0,1]$;

   d) $\displaystyle\int_D \cos x\cos y\cos z$, ahol $D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$;

   e) $\displaystyle\int_D \cos(x+z)$, ahol $D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

2. Számítsuk ki az f függvénynek az N normáltartományon vett integrálját, ha

   a) $f(x,y)=1$, $N=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2\big\}$;

   b) $f(x,y)=\sqrt{y}$, $N=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1, 0\le y\le (1-x)^2\big\}$;

   c) $f(x,y)=xy$, N az $y=x^2-1$ és $y=x+1$ egyenletű görbék által határolt korlátos tartomány.

3. Cseréljük fel az integrálások sorrendjét a következő kettős integrálokban!

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_2^3\int_{(x-1)^2}^{3x-5} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

4. Legyen $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le x\big\}$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T \frac{x^2}{y^2}$ integrált!

5. Legyen T a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ csúcspontok által meghatározott háromszöglap. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_T \sqrt{x+y}$ integrált!

*6. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Emlékeztető.

Fubini-tétel. Kétváltozós $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n=2$) integrálunk. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D=[a,b]\times[c,d]$. Ekkor

$$\int_D f=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n=3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,b],\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\big\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.