1. tétel - Improprius integrálok

Korlátos függvény nem korlátos intervallumon:

Definíció: Legyen $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ függvény olyan, hogy Riemann-integrálható

$[a,b]$-n $\forall b>a$-ra.

Az f improprius értelemben integrálható $[a,\infty[$-n, ha

$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f$ $\exists$ és véges. Ekkor $\int\limits_a^{\infty} f = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f$

Ha létezik ez az integrál, akkor konvergens. Ha nem létezik, vagy létezik, de nem véges, akkor divergens.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$ definiálása: Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon Riemann-integrálható. Az f improprius értelemben integrálható $]-\infty;\infty[$-n, ha valamely $a\in\mathbb{R}$ esetén $\int\limits_{-\infty}^{a} f$ és $\int\limits_a^{\infty} f$ is $\exists$ és legfeljebb az egyik ∞. Ekkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \int\limits_{-\infty}^{a} f + \int\limits_a^{\infty} f$

Állítás: Az integrál értéke nem függ a-tól.

Cauchy-féle főértékkel való definiálás:

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon Riemann-integrálható. Az f improprius értelemben integrálható $]-\infty;\infty[$-n, ha $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b} f$ $\exists$. Konvergens akkor ha ez az összeg véges.

Márkus Bence Gábor - 2011

Improprius integrál véges intervallumon, nem korlátos függvényre

Definíció: legyen $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall c\in]a,b[$-re $[a,c]$-n Riemann integrálható. Az f improprius értelemben integrálható $[a,b[$-n, ha $\lim\limits_{c\to b^-}\int\limits_a^c f$ $\exists$. Ha ez véges, akkor konvergens.

Ekkor $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{c\to b^-}\int\limits_a^c f$

Definíció: legyen $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall c\in]a,b[$-re $[c,b]$-n Riemann integrálható. Az f improprius értelemben integrálható $]a,b]$-n, ha $\lim\limits_{c\to a^+}\int\limits_c^b f$ $\exists$.

Ekkor $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{c\to a^+}\int\limits_c^b f$

Márkus Bence Gábor - 2011

Függvénysorozatok:

Definíció: Legyen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}$. Legyen (f_n) egy sorozat.

Függvénysorok:

Definíció: Legyen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvénysorozat. $\sum f_n$ függvénysor az alábbi szerint: $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$.

Függvénysorozatok konvergencia halmaza:

Definíció: Legyen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ennek konvergenciahalmaza:

$$KH(f_n) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \exists \text{ és véges} \right\}.$$

Határfüggvény: Definíció: (f_n) függvénysorozat határfüggvénye:

$$f: KH(f_n) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Függvénysorok konvergenciahalmaza:

Definíció: Legyen $\sum f_n$ egy függvénysor. Ennek konvergencia halmaza:

$$KH\left(\sum f_n\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum f_n(x) \text{ számsor konvergens} \right\}. \text{ Azaz } KH(S_n).$$

$\sum f_n$ függvénysor összege: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$, $x \in KH\left(\sum f_n\right)$

Pontonzéni konvergencia:

Definíció: Legyen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat. Teljesül hogy $\forall \varepsilon$-hoz és $\forall x$-hez $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$., ahol $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Márkus Bence Gábor - 2011

Egyenletes konvergencia:

Definíció: Legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat. Az f_n függvénysorozat egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazon **egyenletesen konvergál** az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n > N$ és $\forall x \in H$-ra.

Márkus Bence Gábor - 2011

Hatványsorok: Definíció: Legyen $c_n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. A $\sum c_n (x-a)^n$ függvénysort „a közepű" hatványsornak nevezzük.

Konvergenciasugár: Definíció: $\sum c_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad \left(R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \right)$$

Cauchy-Hadamard-tétel: Legyen $\sum c_n (x-a)^n$ hatványsor.

Legyen $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}}$. Ekkor $(a-R, a+R) \subset KH \subset [a-R, a+R]$.

Az összegfüggvény és együtthatói közötti kapcsolat

Definíció: A $\sum c_n (x-a)^n$ hatványsor összegfüggvénye:

$$f : KH \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Tétel: a KH belsejében (azaz $(a-R, a+R)$-ben) az f függvény akárhányszor deriválható.

Az összegfüggvény deriváltja:

Tétel: Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, és $R > 0$.

Ekkor $f^{(n)}(a) = c_n \, n!$

Márkus Bence Gábor - 2011

4. tétel

Taylor-sor

Definíció: legyen f akárhányszor differenciálható függvény. Vegyük a

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ hatványsort. Ezt az f függvény „a" közepű Taylor-sorának nevezzük.

Sorbafejthetőség elégséges feltétele:

Definíció: Az f függvény az $(a-R, a+R)$ intervallumon Taylor-sorba fejthetőnek nevezzük, ha $K \cap (a-R, a+R)$ és az összegfüggvény egyenlő f-fel ebben az intervallumban.

Tétel: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 0 közepű Taylor sora: $\sum x^n$

Tétel: $f(x) = e^x$ $\sum \frac{x^n}{n!}$

Tétel: $f(x) = \sin x$ $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}$

Tétel: $f(x) = \cos x$ $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Márkus Bence Gábor - 2011

5. tétel

Trigonometrikus sor : Definíció:

legyenek $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ adott számok. Az ezekből képzett trigonometrikus sor: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Együtthatók és az összegfüggvény kapcsolata:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx$$

Fourier sor: Definíció (sorbafejthetőség):

Az f függvény Fourier-sorba fejthető, ha a Fourier-sora konvergens és összege egyenlő f-fel.

Definíció (maga a sor):

legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p = 2\pi$ szerint periodikus és Riemann-integrálható.

legyen $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx$.

Ekkor az f függvény Fourier-sora:

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Többváltozós függvények

Definíció: Legyen D a valós $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ szám-n-esekből egy halmaza. A valós értékű f függvény a D minden elemhez

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

valós értéket rendel. D a függvény értelmezési tartománya. Az f által felvett w értékek halmaza a függvény értékkészlete. A w szimbólum f függő változója, és f az n darab $x_1, x_2, \dots, x_n$ független változó függvénye.

Folytonosság: Definíció:

Egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha teljesül:

1, f-nek van (x_0, y_0)-ban helyettesítési értéke

2, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ létezik

3, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Ezt a függvényt folytonosnak nevezik, ha folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában.

Határérték: Definíció:

Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont olyan, hogy (minden) létezik olyan $\delta > 0$ esetén van olyan (x,y) pont ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban van

Márkus Bence Gábor - 2011

határértéke, és ez L, azaz:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x,y) pontjára, amire

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$ fennáll, igaz, hogy $|f(x,y)-L| < \varepsilon$

Márkus Bence Gábor - 2011

7. tétel

Parciális derivált: Definíció:

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Az f függvény az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban differenciálható, ha $\exists\, A \in \mathbb{R}^{2\times n}$ mátrix, melyre teljesül, hogy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0, \quad \text{ahol } f(x+h) = f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n).$$

Ekkor az f deriváltja x-ben $f'(x) = A$.

Jelölés: $Df(x) = A$

Derivált mátrix: (Jacobi mátrix)

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, differenciálható $x \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor célszerű az f koordináta függvények parciális deriváltjai és

$$\underline{\underline{J}} = f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_2(x) & & & \partial_n f_2(x) \end{pmatrix}$$

azaz $J_{ij} = A_{ij} = \partial_j f_i(x)$

Érintősík egyenlete:

görbe: f grafikonját érintő $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontban érintősík egyenlete

$$z = z_0 + \partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

felület: $f(x_0,y_0)$

$$n = (\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0), -1), \quad (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Második derivált:

Hesse-mátrix:

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f'' \to f'$ Jacobi-mátrixa

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f & \partial_{21}^2 f & \partial_{31}^2 f \dots & \partial_{n1}^2 f \\ \partial_{12}^2 f & \partial_{22}^2 f & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \partial_{nn}^2 f \end{pmatrix}$$

Márkus Bence Gábor - 2011

8. tétel

Többváltozós függvény szélsőértékei: Definíció:

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$

a-ban f-nek lokális maximuma, ha $\exists \delta > 0$, és $|x-a| < \delta$, akkor $f(x) \leq f(a)$

szigorúan lok. max $\to |x-a| < \delta$, $x \neq a$, $f(x) < f(a)$

lok. min $\to |x-a| < \delta$, $f(x) \geq f(a)$

szig. lok. min $\to |x-a| < \delta$, $x \neq a$, $f(x) > f(a)$

Szélsőérték: Definíció:

Legyen $f(t, a_2, a_3, \dots, a_n) = \varphi(t)$, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor φ-nek a_1-ban lokális szélsőértéke van. Tehát $\varphi'(a_1) = 0$ és $\varphi'(a_1) = \partial_1 f(a)$,

ahol

$$\varphi'(a_1) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a_1+h) - \varphi(a_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1+h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} =$$

$$= \partial_1 f(a).$$

Szükséges feltétel: Tétel:

Legyen az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenciálható. Ha az a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$, azaz

$$(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)) = (0, 0, \dots, 0)$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Elégséges feltétel - Tétel:

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2-szer differenciálható. Legyen $f'(a) = 0$.

Ha $f''(a)$ pozitív definit, akkor a-ban f-nek szig. lok. minimuma van.

Ha $f''(a)$ negatív definit, -"- szig. lok. maximuma van.

Ha $f''(a)$ indefinit, akkor nincs szélsőérték, nyeregpont.

Pozitív definit, ha $\det \underline{\underline{H}} > 0$ és $a_{11} > 0$ → minimum

Negatív definit, ha $\det \underline{\underline{H}} > 0$ és $a_{11} < 0$ → maximum

Indefinit, ha $\det \underline{\underline{H}} < 0$.

Márkus Bence Gábor - 2011

9. tétel

Többváltozós függvény primitív függvényének definíciója:

A $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye a $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénynek, ha $F' = f$, azaz $\partial_1 F = f_1$, $\partial_2 F = f_2$, …, $\partial_n F = f_n$.

Szükséges feltétel:

Ha f-nek létezik a primitív függvénye, akkor az f', $(\underline{\underline{J}})$ mátrix szimmetrikus. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$-es esetben:

$$\partial_1 F = f_1 \,/\cdot \partial_2 \qquad \partial_2 F = f_2 \,/\cdot \partial_1$$

$$\partial^2_{21} F = \partial_2 f_1 = \partial^2_{12} F = \partial_1 f_2$$

Ez Young-tétele

Elégséges feltétel:

Az elégséges feltétel a potenciál létezéséhez:

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű halmaz, $\exists a \in D$, hogy $\forall x \in D$-re teljesül, hogy $[a,x] \subset D$ és $f'(x)$ szimmetrikus $\forall x \in D$-re

$\exists F: D \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f$

Márkus Bence Gábor - 2011

Görbe definíciója: Egy $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvényt görbének nevezünk.

Görbe ívhossza:

Tétel: Ha $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, folytonosan differenciálható (és $\dot{r}$ is $\exists$ és folytonos), akkor

$$\ell(r)=\int_a^b |\dot{r}(t)|\,dt$$

Vonalintegrál definíciója:

Az f függvénynek létezik vonalintegrálja az r görbe mentén, ha $\exists I\in\mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists \delta>0$, melyre $t_i-t_{i-1}<\delta$ $\forall i$ és $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, akkor $|\sigma-I|<\varepsilon$.
Létezik egy olyan érték, amihez σ közelít.

Jelölés: $\int_r f = I$

Vonalintegrál kiszámítása:

Tétel: Ha $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ folytonos, akkor

$$\exists \int_r f = \int_a^b \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle\,dt$$

Ahol $\langle\rangle$ a skalárszorzást jelenti

Márkus Bence Gábor - 2011

Primitív függvény kapcsolata a vonalintegrállal:

Legyen $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ folytonos. Legyen $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a primitív függvénye f-nek, azaz $F'=f$. Ekkor

$$\int_r f = \int_a^b \langle f(r(t)),\ \dot r(t)\rangle\,dt = \int_a^b \langle F'(r(t)),\ \dot r(t)\rangle\,dt =$$

Mivel $\left[F(r(t))\right]' = F'(r(t))\cdot \dot r(t)$,

$$= \int_a^b \left[F(r(t))\right]'\,dt = F(r(b)) - F(r(a))$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Többváltozós függvény Riemann-integrálja

Definíció: Az f függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha
$\exists\ I \in \mathbb{R}$ szám, úgy hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy ha $x_k - x_{k-1} < \delta$
$\forall k$-ra, akkor $\chi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, tehát $|I - \sigma| < \varepsilon$

$$\underline{I} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Kiszámítás: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, ha $F' = f$

Téglalapra vett integrál:

Definíció: Az $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, ha $\exists$ olyan $I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy
$x_i - x_{i-1} < \delta$ $\forall i$-re és $y_j - y_{j-1} < \delta$ $\forall j$-re és
$\chi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, akkor $|I - \sigma| < \varepsilon$.

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = I$$

Fubini tétele: legyen $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható.
legyen $S(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ is Riemann-integrálható.

Ekkor
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Normáltartományra vett integrál kiszámítása

legyen $T = [a,b] \times [c,d]$

$$\int_N f = \int_T \tilde{f} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Integrál transzformáció (levezetés):

Legyen $Q=[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$, $g:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény

legyen $g(t_1,t_2)=(g_1(t_1,t_2),g_2(t_1,t_2))$, ahol $t_1\in[c_1,d_1]$, $t_2\in[c_2,d_2]$

Vegyük az alábbi speciális eseket: $g_1(t_1,t_2)=\tilde{g}_1(t_1)$

$g_2(t_1,t_2)=\tilde{g}_2(t_2)$

Ekkor: $$\int_T f=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=\int_{a_2}^{b_2}\int_{c_1}^{d_1} f(\tilde{g}_1(t_1),x_2)\left|\tilde{g}_1'(t_1)\right|dt_1\,dx_2=$$

$$=\int_{c_2}^{d_2}\left(\int_{c_1}^{d_1} f(\tilde{g}_1(t_1),\tilde{g}_2(t_2))\left|\tilde{g}_1'(t_1)\right|dt_1\right)\left|\tilde{g}_2'(t_2)\right|dt_2=$$

$$=\int_Q f(g(t))\,|\det g'(t)|\,dt\,,\quad \text{ahol } g'(t)=\begin{pmatrix}\tilde{g}_1'(t_1) & 0\\ 0 & \tilde{g}_2'(t_2)\end{pmatrix}$$

Tétel:

Legyen $f:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény.

Legyen $Q=[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$. Legyen $Q\to T$ bijekció és differenciálható

Ekkor: $$\int_T f(x)\,dx=\int_G f(g(t))\,|\det g'(t)|\,dt$$

Márkus Bence Gábor - 2011

Polár transzformáció:

$$x = r\cos\varphi \qquad r \in [r_1, r_2]$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & +r\cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \det g'(r,\varphi) = r$$

Henger transzformáció:

$$x = r\cos\varphi \qquad r \in [r_1, r_2] \rightarrow [0, R]$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow [0, 2\pi] \text{ Ezáltal } h \in \left[0, \frac{H}{R}(R-r)\right]$$
$$z = h \qquad h \in [0, h]$$

$$g'(r,\varphi,h) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det g' = r$$

Gömbi - transzformáció:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r \in [r_1, r_2] \rightarrow [0, R]$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow [0, 2\pi]$$
$$z = r\cos\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$

$$g'(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi, & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta, & 0, & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\det g' = r^2\sin\theta$$

Márkus Bence Gábor - 2011